بسم الله الرحمن الرحیم

# جلسه ۸

## معادلات دیفرانسیل

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه ( نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه هشتم

# معادلات دیفرانسیل خطی

در فصل سوم معادلات خطی را مطرح می کنیم:

فرم کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه $n$ ام:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

که در آن توابع $F(x)$ ، $a_0(x)$ ، $a_1(x)$ ، .... و $a_n(x)$ بر بازه $I$ پیوسته بوده و $a_n(x)$ بر بازه $I$ متحد صفر نباشد.

تئوری حل معادلات دیفرانسیل خطی را برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم مطرح می کنیم. این تئوری قابل تعمیم به معادلات خطی مراتب بالاتر می باشد

## معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم که در این فصل مطرح می کنیم عبارتند از:

**۱**

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن: $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$

که $F(x)$ ، $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب $x$ هستند.

**۲**

معادله خطی مرتبه دوم همگن: $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب $x$ هستند.

حالت خاصی از معادله ۲

**۳**

معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت: $y''+a_1y'+a_0y=0$

که $a_0$ و $a_1$ اعدادی ثابت هستند.

حالت خاصی از معادله ۱

**۴**

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت : $y''+a_1y'+a_0y=F(x)$

که $F(x)$ تابعی بر حسب $x$ و $a_0$ و $a_1$ اعدادی ثابت هستند.

۱ $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن:

۲ $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن:

## قضیه کلیدی

$y$ — جواب عمومی معادلهٔ ۱ = $y_g$ — جواب عمومی معادلهٔ ۲ + $y_p$ — یک جواب اختصاصی از معادلهٔ ۱

مربوط به جلسه امروز

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن: $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$ ۱

$y_p$

یک جواب اختصاصی از معادلهٔ ۱

روش تغییر پارامتر: ( هدف: یافتن یک جواب اختصاصی برای معادلهٔ ۱ )

دراین روش فرض می کنیم که جواب اختصاصی به فرم

$$y_p=v_1y_1(x)+v_2y_2(x)$$

باشد. از آنجایی که $y_g=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ جواب همگن می باشد و $y_p$ با تغییر پارامترهای $C_1$ و $C_2$ به توابع $v_1$ و $v_2$ بدست آمده است، به همین دلیل این روش را روش تغییر پارامتر نامیم .

Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن: $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$ ۱

با قرار دادن $y_p=v_1y_1(x)+v_2y_2(x)$ در معادله ۱
و ساده کردن روابط خواهیم داشت:

$$y_p=v_1y_1(x)+v_2y_2(x)$$

جواب اختصاصی معادله ۱ خواهد بود هرگاه توابع $v_1$ و $v_2$ در دستگاه زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} v'_1y_1+v'_2y_2=0 \\ v'_1y'_1+v'_2y'_2=F(x) \end{cases}$$

**مثال :** معادله غیر همگن $y''-5y'+6y=3e^{x}$ را حل می کنیم:

**حل :** معادله همگن وابسته $y''-5y'+6y=0$ دارای جواب $y_c=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ است

بنابراین $y_1=e^{2x}$ و $y_2=e^{3x}$ پس:

$$\begin{cases} v_1'e^{2x}+v_2'e^{3x}=0 \\ v_1'(2e^{2x})+v_2'(3e^{3x})=3e^{x} \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در $-2$ و جمع طرفین دو معادله بالا داریم:

$$v_2'e^{3x}=3e^{x}$$

$$v_2'=3e^{-2x} \Rightarrow v_2=\frac{-3}{2}e^{-2x}$$

با جایگذاری $v_2' = 3\,e^{-2x}$ درمعادله اول داریم:

$$v_1' e^{2x} + (3e^{-2x})\,e^{3x} = 0$$

$$v_1' e^{2x} = -3e^{x} \Rightarrow v_1' = -3\,e^{-x} \Rightarrow v_1 = 3\,e^{-x}$$

درنتیجه:

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 = 3e^{-x}.e^{2x} - \frac{3}{2}e^{-2x}.e^{3x}$$

$$= 3e^{x} - \frac{3}{2}e^{x} = \frac{3}{2}e^{x}$$

پس $\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{2}e^{x}}$ جواب عمومی معادله غیر همگن است.

$$\begin{cases} v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0 \\ v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = F(x) \end{cases}$$

دستگاه مقابل را می توان به شکل ماتریسی نوشته و حل نمود

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(x) \end{bmatrix}$$

با استفاده از قاعده کرامر داریم:

$$v'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F(x) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 F(x)}{W(y_1, y_2)} \implies v_1 = \int \frac{-y_2 F(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

$$v'_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & F(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 F(x)}{W(y_1, y_2)} \implies v_2 = \int \frac{y_1 F(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx$$

مثال ۱ . یک جواب خصوصی معادلهٔ $y''+y=\csc x$ را بیابید.

معادلهٔ همگن مربوطه، یعنی $y''+y=0$ دارای جواب عمومی

$$y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$$

$$m^2+1=0 \rightarrow m_1, m_2=\pm i$$

است ، بنابراین $y_1=\sin x$ ، $y_1'=\cos x$ ، $y_2=\cos x$ و $y_2'=-\sin x$ .
رونسکیی $y_1$ و $y_2$ عبارت است از

$$W(y_1, y_2)=y_1y_2'-y_2y_1'=-\sin^2 x-\cos^2 x=-1$$

بنابراین از(۱۲) به‌دست می‌آوریم که

$$v_1=\int\frac{-\cos x\csc x}{-1}dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\log(\sin x)$$

و

$$v_2=\int\frac{\sin x\csc x}{-1}dx=-x$$

نتیجتاً

$$y=\sin x\log(\sin x)-x\cos x$$

جواب خصوصی مطلوب است.

## تعمیم

روش تغییرپارامتر را می توان برای یافتن یک جواب اختصاصی از معادله خطی غیر همگن مرتبه $n$ –ام ، یعنی معادله زیر تعمیم داد.

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$$

**اگر**

$$y_g=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

جواب عمومی معادله همگن زیر باشد:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

**آنگاه** $y_p$ را به فرم زیر در نظر می گیریم:

$$y_p=v_1y_1+v_2y_2+\cdots+v_ny_n$$

از حل دستگاه $n$ معادله و $n$ مجهولی زیر می توان جواب خاص معادله غیر همگن را بدست آورد:

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 + \ldots + v_n' y_n = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' + \ldots + v_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + v_n' y_n^{(n-1)} = F(x) \end{cases}$$

# حالت خاص

**۱** $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$

**حالت خاصی از معادلهٔ ۱**

**۴** $y''+a_1y'+a_0y=F(x)$ **معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت :**

**که $F(x)$ تابعی بر حسب $x$ و $a_0$ و $a_1$ اعدادی ثابت هستند.**

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت : $y''+a_1y'+a_0y = F(x)$ ۴

$y_p$

یک جواب اختصاصی از معادلهٔ ۴

روش ضرائب نامعین: ( هدف: یافتن یک جواب اختصاصی برای معادلهٔ ۴ )

دراین روش، فرم (ظاهر) جواب اختصاصی را پیشنهاد می کنیم. این جواب، دارای ضرائب نامعینی است که با قرار دادن آن در معادله، ضرائب نامعین را تعیین می کنیم. با تعیین این ضرائب، جواب اختصاصی بدست خواهد آمد.

مثلا برای معادله $y''+3y'+2y = 5e^{-2x}$ ، جوابی به فرم $y_p = Be^{-2x}$ پیشنهاد می کنیم. ( چگونگی این پیشنهاد در ادامه توضیح داده خواهد شد). این جواب دارای ضریب نامعین $B$ است. با قرار دادن این جواب در معادله، $B$ را تعیین کرده و لذا جواب اختصاصی $y_p$ بدست خواهد آمد.

## روش ضرائب نامعین

۴

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت : $y''+a_1y'+a_0y = F(x)$

که $F(x)$ تابعی بر حسب $x$ و $a_0$ و $a_1$ اعدادی ثابت هستند.

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$F(x)$

$F(x) = Ae^{rx}$

$F(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$

$$F(x) = \begin{cases} A\sin bx \\ A\cos bx \\ A_1\sin bx + A_2\cos bx \end{cases}$$

**۴** $y''+a_1y'+a_0y = F(x)$ **معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت :**

که $F(x)$ تابعی بر حسب $x$ و $a_0$ و $a_1$ اعدادی ثابت هستند.

**چند جمله ای مفسر یا مشخصه :** $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$F(x) = Ae^{rx}$$

**فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی:** $y_p = Bx^{j}e^{rx}$

$j = 0$ (هرگاه $r$ ریشه چند جمله ای مفسر نباشد)

$j = 1$ (هرگاه $r$ ریشه ساده چند جمله ای مفسر باشد)

$j = 2$ (هرگاه $r$ ریشه مضاعف چند جمله ای مفسر باشد)

**۴** $y''+a_1y'+a_0y = F(x)$ **معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت :**

که $F(x)$ تابعی بر حسب $x$ و $a_0$ و $a_1$ اعدادی ثابت هستند.

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$F(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = x^j(B_0+B_1x + \cdots + B_nx^n)$

$j = 0$ (هرگاه $a_0 \neq 0$ و $a_1 \neq 0$ )

$j = 1$ (هرگاه $a_0 = 0$ و $a_1 \neq 0$ )

$j = 2$ (هرگاه $a_0 = 0$ و $a_1 = 0$ )

۴ معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت : $y''+a_1y'+a_0y = F(x)$

که $F(x)$ تابعی بر حسب $x$ و $a_0$ و $a_1$ اعدادی ثابت هستند.

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2+a_1x+a_0=0$

$$F(x)=\begin{cases} A\sin bx \\ A\cos bx \\ A_1\sin bx + A_2\cos bx \end{cases}$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = x^j(B_1\sin bx + B_2\cos bx)$

$j=0$ (هرگاه $bi$ ریشه چند جمله ای مفسر نباشد)

$j=1$ (هرگاه $bi$ ریشه چند جمله ای مفسر باشد)

# مثال ۱: یافتن فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی

$$y'' - 5y' + 6y = 9e^{5x}$$

$$\boxed{F(x) = Ae^{rx} = 9e^{5x}}$$

$[D^2 - 5D + 6]y = 0 \rightarrow [(D-2)(D-3)]y = 0$ $\qquad m_1 = 2$

$m^2 - 5m + 6 = 0 \rightarrow (m-2)(m-3) = 0$ $\qquad m_2 = 3$

$$\boxed{y_g = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}}$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = Bx^je^{rx}$

$j = 0$ (هرگاه $r$ ریشه چند جمله ای مفسر نباشد)

**لذا :** فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی عبارتست از:

$$y_p = Be^{5x}$$

# مثال ۲: یافتن فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی

$$y'' - 5y' + 6y = 9e^{3x}$$

$$\boxed{F(x) = Ae^{rx} = 9e^{3x}}$$

$[D^2 - 5D + 6]y = 0 \ \rightarrow [(D-2)(D-3)]y = 0$

$m^2 - 5m + 6 = 0 \ \rightarrow \ (m-2)(m-3) = 0$

$m_1 = 2$

$m_2 = 3$

$$\boxed{y_g = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}}$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = Bx^j e^{rx}$

$j = 1$ (هرگاه $r$ ریشه ساده چند جمله ای مفسر باشد)

**لذا :** فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی عبارتست از:

$$y_p = Bxe^{3x}$$

# مثال ۳: یافتن فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی

$$y'' - 6y' + 9y = 5e^{2x}$$

$$\boxed{F(x) = Ae^{rx} = 5e^{2x}}$$

$[D^2 - 6D + 9]y = 0 \rightarrow [(D-3)(D-3)]y = 0$

$m^2 - 6m + 9 = 0 \rightarrow (m-3)(m-3) = 0$

$m_1 = 3$

$m_2 = 3$

$$\boxed{y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = Bx^j e^{rx}$

$j = 0$ (هرگاه $r$ ریشه چند جمله ای مفسر نباشد)

**لذا :** فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی عبارتست از:

$$y_p = Be^{2x}$$

# مثال ۴: یافتن فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی

$$y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}$$

$$F(x) = Ae^{rx} = 5e^{3x}$$

$[D^2 - 6D + 9]y = 0 \rightarrow [(D-3)(D-3)]y = 0$

$m^2 - 6m + 9 = 0 \rightarrow (m-3)(m-3) = 0$

$m_1 = 3$

$m_2 = 3$

$$y_g = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = Bx^je^{rx}$

$j = 2$ (هرگاه $r$ ریشه مضاعف چند جمله ای مفسر باشد)

**لذا** : فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی عبارتست از:

$$y_p = Bx^2e^{2x}$$

# مثال ۵: یافتن فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی

$$y'' + 2y' + 3y = 5e^{3x}$$

$$F(x) = Ae^{rx} = 5e^{3x}$$

$$[D^2 + 2D + 3]y = 0$$

$$m^2 + 2m + 3 = 0 \rightarrow m_1, m_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\, i$$

$$y_g = C_1 e^{-x} \cos\sqrt{2}x + C_2 e^{-x} \sin\sqrt{2}x$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = Bx^{j}e^{rx}$

$j = 0$ (هرگاه $r$ ریشه چند جمله ای مفسر نباشد)

**لذا :** فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی عبارتست از:

$$y_p = Be^{3x}$$

# مثال ۶: یافتن فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی

$$y'' - 5y' + 6y = 4\sin 7x$$

$$F(x) = A\sin bx = 4\sin 7x$$

$[D^2 - 5D + 6]y = 0 \rightarrow [(D-2)(D-3)]y = 0$

$m^2 - 5m + 6 = 0 \rightarrow (m-2)(m-3) = 0$

$m_1 = 2$

$m_2 = 3$

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = x^j (B_1 \sin bx + B_2 \cos bx)$

$j = 0$ (هرگاه $bi$ ریشه چند جمله ای مفسر نباشد)

**لذا :** فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی عبارتست از:

$$y_p = (B_1 \sin 7x + B_2 \cos 7x)$$

# مثال ۷: یافتن فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی

$$y'' + 9y = 4\sin 3x$$

$$F(x) = A\sin bx = 4\sin 3x$$

$$[D^2 + 9]y = 0$$

$$m^2 + 9 = 0$$

$$m_1, m_2 = \pm 3i$$

$$y_g = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = x^j (B_1 \sin bx + B_2 \cos bx)$

$j = 1$ (هرگاه $bi$ ریشه چند جمله ای مفسر باشد)

**لذا** : فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی عبارتست از:

$$y_p = x(B_1 \sin 3x + B_2 \cos 3x)$$

# مثال ۸: یافتن فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی

$$y'' + 2y' + 3y = 4\sin 7x$$

$$\boxed{F(x) = A\sin bx = 4\sin 7x}$$

$$[D^2 + 2D + 3]y = 0$$

$$m^2 + 2m + 3 = 0 \quad \to m_1, m_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\, i$$

$$\boxed{y_g = C_1 e^{-x}\cos\sqrt{2}x + C_2 e^{-x}\sin\sqrt{2}x}$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = x^j(B_1 \sin bx + B_2 \cos bx)$

$j = 0$ (هرگاه $bi$ ریشه چند جمله ای مفسر نباشد)

**لذا :** فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی عبارتست از:

$$y_p = (B_1 \sin 7x + B_2 \cos 7x)$$

## مثال ۹: یافتن فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی

$$y'' - 5y' + 6y = x^3 + 2x$$

$$F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 = x^3 + 2x$$

$a_1 = -5$ و $a_0 = 6$

$[D^2 - 5D + 6]y = 0 \rightarrow [(D-2)(D-3)]y = 0$

$m^2 - 5m + 6 = 0 \rightarrow (m-2)(m-3) = 0$

$m_1 = 2$

$m_2 = 3$

$$y_g = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی: $y_p = x^j(B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3)$

$j = 0$ (هرگاه $a_0 \neq 0$ و $a_1 \neq 0$ )

**لذا :** فرم پیشنهادی برای جواب اختصاصی عبارتست از:

$$y_p = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3)$$

## نکته

۱) $y''+a_1y'+a_0y=F_1(x)$

۲) $y''+a_1y'+a_0y=F_2(x)$

۳) $y''+a_1y'+a_0y=F_1(x)+F_2(x)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| جواب اختصاصی معادله دیفرانسیل ۳ | = | جواب اختصاصی معادله دیفرانسیل ۱ | + | جواب اختصاصی معادله دیفرانسیل ۲ |

$y''-5y'+6y=x^3+2x \longrightarrow y_p=(B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3)$

$y''-5y'+6y=9e^{5x} \longrightarrow y_p=Be^{5x}$

$y''-5y'+6y=x^3+2x+9e^{5x} \longrightarrow y_p=(B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3)+Be^{5x}$

# معادله کوشی اویلر مرتبه n ام

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 xy' + a_0 y = 0$$

با تغییر متغیر $x = e^t$ می توان معادله کوشی اویلر را به معادله خطی همگن با ضرایب ثابت تبدیل کرد.

$$\frac{d}{dt} = D$$

$$x = e^t \xrightarrow{t=\ln x} xy' = x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = x\frac{dy}{dt}\frac{1}{x} = \frac{dy}{dt} = Dy$$

بطور کلی:

$$xy' = Dy$$

$$x^2y'' = D(D-1)y$$

$$\vdots$$

$$x^n y^{(n)} = D(D-1)(D-2)\dots(D-(n-1))y$$

$$xy' = Dy$$

$$x^2y'' = D(D-1)y$$

$$\vdots$$

$$x^ny^{(n)} = D(D-1)(D-2)\dots(D-(n-1))y$$

$$\frac{d}{dt} = D$$

تغییر متغیر

$$x = e^t$$

$$t = \ln x$$

**مثال:**

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

$$D(D-1)y - 4Dy + 6y = 0$$

$$D^2y - Dy - 4Dy + 6y = 0$$

$$\to D^2y - 5Dy + 6y = 0$$

$$\to [(D-2)(D-3)]y = 0$$

$$\to y_g = C_1e^{2\ln x} + C_2e^{3\ln x}$$

$$\to y_g = C_1x^2 + C_2x^3$$

پایان