بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۷

معادلات دیفرانسیل

Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه هفتم

معادلات دیفرانسیل خطی

در فصل سوم معادلات خطی را مطرح می کنیم:

فرم کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

که در آن توابع $F(x)$ ، $a_0(x)$ ، $a_1(x)$ ، .... و $a_n(x)$ بر بازه I پیوسته بوده و $a_n(x)$ بر بازه I متحد صفر نباشد.

تئوری حل معادلات دیفرانسیل خطی را برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم مطرح می کنیم. این تئوری قابل تعمیم به معادلات خطی مراتب بالاتر می باشد

Mathematics by Dr. Moslehi: Teaching & Research

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم که در این فصل مطرح می کنیم عبارتند از:

۱ معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن:

$$\boldsymbol{y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)}$$

که $F(x)$ ، $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

۲ معادله خطی مرتبه دوم همگن:

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

حالت خاصی از معادله ۲

۳ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

$$y''+a_1y'+a_0y=0$$

که a_0 و a_1 اعدادی ثابت هستند.

حالت خاصی از معادله ۱

۴ معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت :

$$y''+a_1y'+a_0y=F(x)$$

که $F(x)$ تابعی بر حسب x و a_0 و a_1 اعدادی ثابت هستند.

۱ $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$:معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن

۲ $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$:معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

قضیه کلیدی

y = y_g + y_p

جواب عمومی معادلهٔ ۱ = جواب عمومی معادلهٔ ۲ + یک جواب اختصاصی از معادلهٔ ۱

y_g

مربوط به جلسه قبل

جواب عمومی معادلهٔ ۲

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله ۲ در بازه $[a,b]$ باشند، آنگاه:

الف– $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ نیز به ازای هر دو عدد ثابت اختیاری C_1 و C_2 ، جواب معادله ۲ خواهد بود.

ب– رونسکین آنها عبارتست از: $W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1y'_2 - y_2y'_1$

ج– رونسکین آنها، یعنی $W(y_1,y_2)$ ، در بازه $[a,b]$ یا همواره صفر است و یا هیچگاه صفر نمی شود.

د– این دو جواب وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر: $W(y_1,y_2) = 0$

ه– اگر جوابهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقل خطی نیز باشند، آنگاه $y_g = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ جواب عمومی معادله ۲ در بازه $[a,b]$ خواهد بود.

و– بنابر این برای یافتن جواب عمومی معادله ۲، کافیست دو جواب مستقل خطی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ از آن را بیابیم. اگر فقط $y_1(x)$ داده شده باشد، می توانیم $y_2(x)$ را خودمان پیدا کنیم.

قرار می دهیم: $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ که $v = \int \frac{1}{{y_1}^2} e^{-\int a_1(x)dx} dx$

تعمیم

فرض کنید معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام همگن به فرم زیر داده شده باشد:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

اگر $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، ... و $y_n(x)$ جوابهای معادله فوق در بازه $[a,b]$ باشند، آنگاه:

ب- رونسکین آنها عبارتست از:

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ج- رونسکین آنها، یعنی $W(y_1,y_2,\dots,y_n)$، در بازه $[a,b]$ یا همواره صفر است و یا هیچگاه صفر نمی شود.

د- این دو جواب وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر: $W(y_1,y_2,\dots,y_n)=0$

ه- اگر جوابهای $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ ، ... و $y_n(x)$ نیز مستقل خطی باشند، آنگاه $y_g=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ جواب عمومی معادله فوق در بازه $[a,b]$ خواهد بود.

حالت خاص

۲ $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$

حالت خاصی از معادلهٔ ۲

۳ $y''+a_1y'+a_0y=0$

معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

که a_0 و a_1 اعدادی ثابت هستند.

معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت: $y''+a_1y'+a_0y=0$ ۳

که a_0 و a_1 اعدادی ثابت هستند.

می توان حدس زد که این معادله جوابی به فرم $y=e^{mx}$ دارد.
در زیر، صحت این حدس را بررسی می کنیم:

اگر $y=e^{mx}$ جوابی از معادله ۳ باشد، باید در آن صدق کند.

$$y''+a_1y'+a_0y=0 \xrightarrow{y=e^{mx}} m^2e^{mx}+a_1me^{mx}+a_0e^{mx}=0$$

$$\leftrightarrow \quad e^{mx}(m^2+a_1m+a_0)=0$$

$$\leftrightarrow \quad m^2+a_1m+a_0=0$$

بنابر این:

$y=e^{mx}$ جوابی از معادله ۳ می باشد هرگاه m در رابطه $m^2+a_1m+a_0=0$ صدق کند

مثال : معادله $y'' - 5y' + 6y = 0$ را در نظر بگیرید

$y_1 = e^{2x}$ جواب معادله فوق است زیرا $m = 2$ در رابطه $m^2 - 5m + 6 = 0$ صدق می کند

$y_2 = e^{3x}$ جواب معادله فوق است زیرا $m = 3$ در رابطه $m^2 - 5m + 6 = 0$ صدق می کند

بنابر این:

با استفاده از ریشه های چند جمله ای $x^2 - 5x + 6 = 0$ ، جوابهایی از معادله دیفرانسیل $y'' - 5y' + 6 = 0$ به دست خواهد آمد. به این چند جمله ای، چند **جمله ای مفسر** یا مشخصه گویند.

در اینجا ریشه های چند جمله ای مفسر عبارتند از: 2 و 3

بنابراین:

۳ $y''+a_1y'+a_0y=0$ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

که a_0 و a_1 اعدادی ثابت هستند.

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2+a_1x+a_0=0$

اگر m_1 ریشه چند جمله ای مفسر $x^2+a_1x+a_0=0$ باشد

آنگاه

$y=e^{m_1x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل $y''+a_1y'+a_0y=0$ خواهد بود.

۳ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت: $y''+a_1y'+a_0y = 0$

که a_0 و a_1 اعدادی ثابت هستند.

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$\Delta = {a_1}^2 - 4a_0$$

$\Delta > 0$

$\Delta = 0$

$\Delta < 0$

معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت: $y''+a_1y'+a_0y=0$ **۳**

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2+a_1x+a_0=0$

$\Delta = {a_1}^2-4a_0$

$\Delta > 0$

در این حالت، چند جمله ای مفسر دو ریشه حقیقی و متمایز m_1 و m_2 دارد

لذا $y_1=e^{m_1x}$ و $y_2=e^{m_2x}$ دو جواب معادله **۳** خواهند بود.

این دو جواب مستقل خطی هستند زیرا : $W(y_1,y_2)\neq 0$

بنابر این جواب عمومی معادله **۳** به فرم زیر خواهد بود:

$$y_g = C_1\underbrace{e^{m_1x}}_{y_1(x)} + C_2\underbrace{e^{m_2x}}_{y_2(x)}$$

۳ $y''+a_1y'+a_0y=0$ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2+a_1x+a_0=0$

$\Delta = {a_1}^2-4a_0$

$\Delta = 0$

در این حالت، چند جمله ای مفسر یک ریشه مضاعف مثل m دارد.
همچنین m ریشه مشتق چند جمله ای مفسر است یعنی
$2m+a_1=0 \rightarrow a_1=-2m$

لذا $y_1=e^{mx}$ جواب معادله ۳ خواهد بود. $y_2=vy_1=xe^{mx}$ که

$$v=\int \frac{1}{{y_1}^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx=\int \frac{1}{e^{2mx}}e^{-a_1x}dx=\int dx=x$$

این دو جواب مستقل خطی هستند زیرا : $W(y_1,y_2)\neq 0$

بنابر این جواب عمومی معادله ۳ به فرم زیر خواهد بود:

$$y_g=C_1\underbrace{e^{mx}}_{y_1(x)}+C_2\underbrace{xe^{mx}}_{y_2(x)}$$

۳ $y''+a_1y'+a_0y = 0$ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$\Delta = {a_1}^2 - 4a_0$$

$\Delta < 0$ در این حالت، چند جمله ای مفسر دو ریشه مختلط $m_1 ,m_2 = a \pm bi$ دارد

لذا $y_1 = e^{e^{(a+bi)x}}$ و $y_2 = e^{e^{(a-bi)x}}$ دو جواب معادله **۳** خواهند بود.

این دو جواب مستقل خطی هستند زیرا : $W(y_1,y_2) \neq 0$

بنابر این جواب عمومی معادله **۳** در دستگاه اعداد مختلط به فرم زیر خواهد بود:

$$y_g = C_1 \underbrace{e^{(a+bi)x}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{(a-bi)x}}_{y_2(x)}$$

این جواب در دستگاه اعداد حقیقی می نویسیم.

ادامه صفحه بعد .....

$\Delta < 0$

$$y_g = C_1 \underbrace{e^{(a+bi)x}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{(a-bi)x}}_{y_2(x)}$$

$$\rightarrow y_g = C_1\, e^{ax}\, e^{(bi)x} + C_2\, e^{ax}\, e^{(-bi)x}$$

$$\rightarrow y_g = C_1\, e^{ax}(\cos bx + i\, sin\, bx) + C_2\, e^{ax}(\cos bx - i\, sin\, bx)$$

$$\rightarrow y_g = (C_1 + C_2)\, e^{ax} \cos bx + i(C_1 - C_2)\, e^{ax} sin\, bx$$

جواب عمومی فوق به ازای هر C_1 و C_2 ، یک جواب اختصاصی خواهد داد.

اگر $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ آنگاه $y_1 = e^{ax}\cos bx$ یک جواب معادله ۳ است.

اگر $C_1 = -\frac{i}{2}$ ، $C_2 = \frac{i}{2}$ آنگاه $y_2 = e^{ax} sin\, bx$ یک جواب معادله ۳ است.

این دو جواب مستقل خطی هستند زیرا : $W(y_1,y_2) \neq 0$

بنابر این جواب عمومی معادله ۳ را می توان در دستگاه اعداد حقیقی به فرم زیر نوشت:

$$y_g = C_1 \underbrace{e^{ax}\cos bx}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{ax} sin\, bx}_{y_2(x)}$$

بطور کلی:

۳ $y''+a_1y'+a_0y=0$ معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

که a_0 و a_1 اعدادی ثابت هستند.

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2+a_1x+a_0=0$

$$\Delta = {a_1}^2 - 4a_0$$

$\Delta > 0$

$$y_g = C_1 \underbrace{e^{m_1 x}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{m_2 x}}_{y_2(x)}$$

$\Delta = 0$

$$y_g = C_1 \underbrace{e^{mx}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{xe^{mx}}_{y_2(x)}$$

$\Delta < 0$

$$y_g = C_1 \underbrace{e^{ax}\cos bx}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{e^{ax}\sin bx}_{y_2(x)}$$

مثال: معادلات

الف) $y'' - 5y' + 6y = 0$

ب) $y'' - 4y' + 4y = 0$

ج) $y'' - y' + y = 0$

معادلات مرتبه دوم با ضرایب ثابت می باشند.

حل:

الف) معادله مفسر عبارت است از $m^2-5m+6=0$

که $m=2,3$

بنابراین: $\boxed{y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

ب) معادله مفسر عبارت است از $m^2-4m+4=0$ که $m=2,2$

بنابراین: $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

ج) معادله مفسر عبارت است از $m^2-m+1=0$ که

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

بنابراین

$$\boxed{y=e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

عملگر D :

با تعریف نماد $D = \frac{d}{dx}$ داریم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = Dy$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y$$

$$\vdots$$

$y'' + a_1y' + a_0y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (D^2 + a_1D + a_0)y = 0$

چند جمله ای مفسر یا مشخصه : $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

$$(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = 0$$

تعمیم

نتایج بدست آمده را برای معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت مرتبه بالاتر نیزمی توان تعمیم داد . یعنی اگر چند جمله ای مفسر معادله دیفرانسیل دارای ریشه های حقیقی متمایز، مضاعف و مختلط باشد، آن گاه جواب معادله دیفرانسیل، ترکیبی از جواب های

$$y = x^k e^{mx}$$

$$y = x^k e^{ax} \cos bx$$

$$y = x^k e^{ax} \sin bx$$

خواهد بود.

مثال:

$$[(D-2)(D-5)(D-6)^2\,(D^2+2D+3)]y=0$$

$$(m-2)(m-5)(m-6)^2\,(m^2+2m+3)=0$$

$$m_1=2$$

$$m_2=5$$

$$m_3\,,m_4=6$$

$$(m^2+2m+3)=0\ \rightarrow m_5\,,m_6=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=-1\pm\sqrt{2}\,i$$

$$\boxed{y_g=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+C_3e^{6x}+C_4xe^{6x}+C_5e^{-x}\cos\sqrt{2}x+C_6e^{-x}\sin\sqrt{2}x}$$

مثال:

$$[(D-5)^4(D-2)]y=0$$

$$(m-5)^4(m-2)=0$$

$m_1\ , m_2, m_3, m_4 = 5$

$m_4 = 2$

$$\boxed{y_g = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x} + C_3x^2e^{5x} + C_4x^3e^{5x} + C_5e^{2x}}$$

مثال:

$$[(D+7)^3(D^2+2D+3)^2]y=0$$

$$(m+7)^3(m^2+2m+3)^2=0$$

$$m_1, m_2, m_3=-7$$

$$(m^2+2m+3)=0 \rightarrow m_4, m_5=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=-1\pm\sqrt{2}\,i$$

$$m_6, m_7=-1\pm\sqrt{2}$$

$$y_g=C_1e^{-7x}+C_2xe^{-7x}+C_3x^2e^{-7x}$$
$$+C_4e^{-x}\cos\sqrt{3}x+C_5e^{-x}\,sin\,\sqrt{3}x+C_6x\,e^{-x}\cos\sqrt{2}x+C_7x\,e^{-x}\,sin\,\sqrt{2}x$$

پایان