Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۵

معادلات دیفرانسیل

Mathematics by Dr. Moslehi: Teaching & Research

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه پنجم

فصل اول
معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در فصل اول، هدف ما حل معادلات مرتبه اول به فرم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

یا بطور معادل به فرم:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

می باشد

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \equiv \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

آنچه تاکنون مطالعه کرده ایم:

- ساده ترین نوع
- معادلات جدا پذیر
- معادلات همگن
- معادلات کامل
  - عامل انتگرالساز
- معادلات خطی مرتبه اول
  - معادله برنولی
  - معادله ریکاتی

موضوع بحث امروز

- معادلات مرتبه دو و بالاتر که می توان آنها را به دو یا چند معادله مرتبه اول تبدیل کرد(کاهش مرتبه)

موضوع بحث امروز

در جلسه قبل گفته شد که:

فرم کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

عامل انتگرالساز

$$P = e^{\int f(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y.P) = Pg$$

جواب عمومی

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C\right)$$

معادلات برنولی

معادلات برنولی

فرم کلی معادله برنولی:

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)y^n$$

این معادله را می توان به تغییر متغیر $u=y^{(1-n)}$ به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل کرد.

$$u=y^{(1-n)} \Longrightarrow \frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=(1-n)y^{(-n)}\frac{dy}{dx}$$

با ضرب طرفین معادله برنولی در $(1-n)y^{(-n)}$ داریم:

$$(1-n)y^{(-n)}\frac{dy}{dx}+(1-n)y^{(-n)}f(x)y=(1-n)y^{(-n)}g(x)y^n$$

$$\underbrace{(1-n)y^{(-n)}\frac{dy}{dx}}_{\frac{du}{dx}}+(1-n)f(x)\underbrace{y^{(1-n)}}_{u}=(1-n)g(x)$$

معادله خطی مرتبه اول

$$\frac{du}{dx}+(1-n)f(x)u=(1-n)g(x)$$

مثال — معادله برنولی

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3 y^4$$

$n = 4$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = x^3$

$$u = y^{1-n} = y^{-3}$$

$$\frac{du}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

طرفین معادله را در $\left(-3y^{-4}\frac{dy}{dx}\right)$ ضرب می کنیم. داریم:

$$\frac{du}{dx} + \left(\frac{-3}{x}\right)u = -3x^3$$ خطی مرتبه اول

$$P = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln|x|} = e^{\ln|x^{-3}|} = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(u\cdot\frac{1}{x^3}\right) = (-3x^3)\left(\frac{1}{x^3}\right) \Longrightarrow \frac{u}{x^3} = -3x + C$$

$$\boxed{u = -3x^4 + Cx^3}$$

مثال: $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

معادله برنولی $n = \frac{1}{2}$

تغییر متغیر: $u = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

با ضرب طرفین معادله در $\frac{1}{2} y^{(-\frac{1}{2})}$ داریم،

$$\frac{du}{dx} + (\tfrac{1}{2})(4x)u = (\tfrac{1}{2})(2xe^{-x^2})$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} + 2xu = xe^{-x^2}$$ خطی مرتبه اول

$$P = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(u\cdot e^{x^2}\right) = \overset{x}{\cancel{\left(xe^{-x^2}\right)\left(e^{x^2}\right)}}$$

$$u\cdot e^{x^2} = \int x\,dx + C$$

$$ue^{x^2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$u = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

کاهش مرتبه

فرم کلی یک معادله مرتبه دوم:

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

دو حالت خاص در نظر می گیریم:

معادله فاقد متغیر وابسته y باشد

معادله فاقد متغیر مستقل x باشد

کاهش مرتبه

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

معادله فاقد متغیر وابسته y باشد

$$xy'' = y'$$

$$xy'' - y' = 3x^2$$

کاهش مرتبه

الف) حل معادله $f(x, y', y'') = 0$

با تغییر متغیر $y' = p$ **می توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد**

که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلا بحث شده

است می توان آنرا حل کرد

زیرا بافرض $y' = p$ **داریم** $y'' = \dfrac{dp}{dx}$ **که با جایگذاری درمعادله**

نتیجه می شود

$$\boxed{f(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0}$$

که معادله مرتبه اول می باشد.

مثال: (معادله فاقد y)

$$xy'' = y'$$

$$y' = P \Rightarrow y'' = \frac{dP}{dx}$$

با جایگذاری در معادله:

$$\boxed{x \cdot \frac{dP}{dx} = P}$$ معادله مرتبه اول

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|P| = \ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow P = C_1 x$$

حال طبق تعریف داریم: $\text{لذا} .\ P = y'$

$$\boxed{y' = C_1 x}$$ معادله مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x \Rightarrow dy = C_1 x\,dx \Rightarrow y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

کاهش مرتبه

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

معادله فاقد متغیر مستقل x باشد

$$yy'' = (y')^2$$

$$y'' + y = 0$$

ب) حل معادله $f(y,y',y'')=0$

با تغییر متغیر $y'=p$ **می توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد**

که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلا بحث شده

است می توان آنرا حل کرد

زیرا بافرض $y'=p$ **داریم** $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

که با جایگذاری درمعادله نتیجه می شود

$$\boxed{f(y,p,p\frac{dp}{dy})=0}$$

که معادله مرتبه اول با فرض y **متغیر مستقل و** p **متغیر وابسته می باشد.**

مثال: $yy'' = (y')^2$ (معادله فاقد x)

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$\frac{dy}{dx} = p$

با جایگذاری در معادله

$$y\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}} \Rightarrow \ln|p| = \ln|y| + \ln|c_1|$$

$$\Rightarrow p = c_1 y \xrightarrow{p = y'} \boxed{y' = c_1 y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 dx \Rightarrow \ln|y| = c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow |y| = e^{(c_1 x + c_2)} \Rightarrow y = \pm e^{c_2} \cdot e^{c_1 x}$$

$$\Rightarrow y = c_2^* e^{c_1 x}$$

پایان