

جلسه

معادلات دیفرانسیل



## جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی

کارشناسی: ریاضی کاربردی

کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم‌های دینامیکی)

وب سایت: [www.mbdm.ir](http://www.mbdm.ir)

# فصل اول

# معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

جلسه نهم



در فصل اول، هدف ما حل معادلات مرتبه اول به فرم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

یا بطور معادل به فرم:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

می باشد

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \equiv$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$



آنچه تاکنون مطالعه کرده ایم:

ساده ترین نوع

معادلات جدا پذیر

معادلات همگن

معادلات کامل

عامل انتگرالساز

معادلات خطی مرتبه اول

معادله برنولی

معادله ریکاتی

معادلات مرتبه دو و بالاتر که می توان آنها را به دو یا چند معادله مرتبه اول تبدیل کرد (کاهش مرتبه)



## جلسه قبل گفته شد که:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

فرم کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول:

$$P = e^{\int f(x)dx}$$

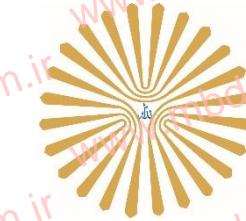
عامل انتگرال‌ساز

$$\frac{d}{dx}(y \cdot P) = Pg$$

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left( \int e^{\int f(x)dx} g(x) dx + C \right)$$

جواب عمومی

# معادلات برنولی



# معادلات برنولی



$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n$$

فرم کلی معادله برنولی:

این معادله را می توان به تغییر متغیر  $u = y^{(1-n)}$  به یک معادله خطی مرتبه اول تبدیل کرد.

$$u = y^{(1-n)} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = (1-n)y^{(-n)} \frac{dy}{dx}$$

با ضرب طرفین معادله برنولی در  $(1-n)y^{(-n)}$  داریم:

$$(1-n)y^{(-n)} \frac{dy}{dx} + (1-n)y^{(-n)}f(x)y = (1-n)y^{(-n)}g(x)y^n$$

$$\underbrace{(1-n)y^{(-n)} \frac{dy}{dx}}_{\frac{du}{dx}} + (1-n)f(x) \underbrace{y^{(1-n)}}_u = (1-n)g(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n)f(x)u = (1-n)g(x)$$

معادله خطی مرتبه اول

$$y' + \frac{1}{x} y = x^r y^k$$

نیز

جی



$$n = r^*$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = x^r$$

$$u = y^{1-n} = y^{-r^*}$$

$$\frac{du}{dx} = -r^* y^{-r^* - 1} \frac{dy}{dx}$$

که  $\int_{-r^*}^r f(x) g(x) dx = \int_{-r^*}^r (-r^* y^{-r^*} \frac{dy}{dx}) dy$  می باشد

$$\frac{du}{dx} + \left(-\frac{1}{x}\right) u = -r^* x^r$$

$$P = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x^{-1}|}$$

حل

$$= e^{\ln|x^{-1}|}$$

$$\frac{d}{dx} \left( u \cdot \frac{1}{x^r} \right) = \left( -r^* x^r \right) \left( \frac{1}{x^r} \right) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{u}{x^r}}_{u = -r^* x^r + C} = -r^* x + C$$

$$\boxed{u = -r^* x^r + C x^r}$$



$$y' + \gamma x y = \gamma x e^{-\alpha t} \sqrt{y}$$

نیز نویسندگان:  $u = y^{1-\frac{1}{r}} = y^{\frac{r-1}{r}}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{r} y^{-\frac{1}{r}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} + \left(\frac{1}{r}\right)(\gamma x) u = \left(\frac{1}{r}\right)(\gamma x e^{-\alpha t})$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} + \gamma x u = x e^{-\alpha t}$$

$$P = e^{\int \gamma x dx} = e^{\alpha t}$$



$$\frac{d}{dx} (u \cdot e^{ax}) = (ae^{-ax})(e^{ax})$$

$$u \cdot e^{ax} = \int a dx + C$$

$$ue^{ax} = \frac{x^r}{r} + C$$

$$u = e^{-ax} \left( \frac{x^r}{r} + C \right)$$



$$f(x, y, y', y'') = 0$$

فرم کلی یک معادله مرتبه دوم:

دو حالت خاص در نظر می‌گیریم:

معادله فاقد متغیر وابسته  $y$  باشد

معادله فاقد متغیر مستقل  $x$  باشد

## کاهش مرتبه



$$f(x, y, y', y'') = 0$$

معادله فاقد متغیر وابسته  $y'$  باشد

$$xy'' = y'$$

$$xy'' - y' = 3x^2$$



الف) حل معادله با تغییر متغیر  $y' = p$  می‌توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد

که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلاً بحث شده

که با جایگذاری در معادله

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$y' = p$$

نتیجه می‌شود

$$f(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$$

که معادله مرتبه اول می‌باشد.



$$y'' = y'$$

$$y' = P \Rightarrow y'' = \frac{dP}{dx}$$

$$\boxed{\alpha \cdot \frac{dP}{dx} = P}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{dx}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \ln|P| = \ln|\alpha| + \ln(C_1) \Rightarrow P = C_1 \alpha$$

$$\boxed{y' = C_1 \alpha}$$

جهت مطالعه

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \alpha$$

جهت مطالعه

$$dy = C_1 \alpha dx$$

$$y = \underbrace{C_1 \frac{x^{\alpha}}{\alpha}}_{\text{اجایی}} + C$$

(حالت مطالعه)

: جلسه

اجایی

## کاهش مرتبه



$$f(x, y, y', y'') = 0$$

معادله فاقد متغیر مستقل  $x$  باشد

$$yy'' = (y')^2$$

$$y'' + y = 0$$



ب) حل معادله  $f(y, y', y'') = 0$  با تغییر متغیر  $y' = p$  می‌توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلاً بحث شده است.

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

زیرا با فرض  $y' = p$  داریم

که با جایگذاری در معادله نتیجه می‌شود

$$f(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$$

که معادله مرتبه اول با فرض  $y'$  متغیر مستقل و  $p$  متغیر وابسته می‌باشد.

$$yy'' = (y')^r$$

$$(x \text{ میل نباشد})$$

$$y' = P \Rightarrow y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \left( \frac{dy}{dx} \right) = P \frac{dP}{dy}$$

: جهاد



$$y \left( P \frac{dP}{dy} \right) = P^r$$

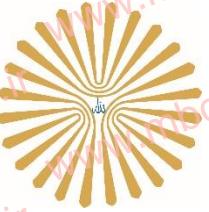
$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{P} = \frac{dy}{y}} \Rightarrow \ln|P| = \ln|y| + \ln|C_1|$$

$$\Rightarrow P = C_1 y \quad \boxed{P = y'} \Rightarrow \boxed{y' = C_1 y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln|y| = C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow |y| = e^{(C_1 x + C_2)} \Rightarrow y = \pm e^{C_1 x} \cdot e^{C_2}$$

$$\Rightarrow y = C_3 e^{C_1 x}$$



پایان