Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

تمرین با پاسخ

(معادلات مرتبه اول و دوم، حل معادلات با استفاده از سری ها)

۱- معادله دیفرانسیل $(xy+3)dx+(2x-y^2+1)dy=0$ را به صورت فرم استاندارد در آورید.

حل: این معادله به فرم دیفرانسیلی می باشد که آن را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$(2x-y^2+1)dy=-(xy+3)dx$$

که دارای فرم استاندارد $\frac{dy}{dx}=\frac{-(xy+3)}{2x-y^2+1}$ یا $y'=\frac{xy+3}{y^2-2x-1}$ می باشد.

۲- تعیین کنید کدام از یک از معادلات زیر جدا پذیر هستند؟

الف) $\sin x dx+y^2dy=0$

ب) $xy^2dx-x^2y^2dy=0$

ج) $(1+xy)dx+ydy=0$

حل:

الف)جدا پذیر است. در اینجا $M(x,y)=A(x)=\sin x$ و $N(x,y)=B(y)=y^2$.

ب)معادله به شکل کنونی جداپذیر نمی باشد.زیرا تابع $M(x,y)=xy^2$ تنها بر حسب x نیست.

اما اگر دو طرف تساوری را بر x^2y^2 تقسیم کنیم معادله به صورت $\frac{1}{x}dx+(-1)dy=0$ در می آید که جداپذیر است.در اینجا $B(y)=-1$ و $A(x)=\frac{1}{x}$ می باشند.

ج) معادله جداپذیر نیست، زیر تابع $M(x,y)=1+xy$ تنها بر حسب x نمی باشد.

۳-معادله $xdx-y^2dy=0$ را حل کنید.

حل: در این معادله دیفرانسیل $B(x)=-y^2$ و $A(x)=x$ می باشد. با جایگذاری در رابطه $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ داریم :

$$\int xdx+\int(-y^2)dy=c$$

که پس از حل انتگرال ها به صورت $\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}=c$ در می آید. با ساده کردن معادله به طور صریح نسبت به y داریم :

$$; k=-3c \quad y=(\frac{3}{2}c^2+k)^{\frac{1}{2}}$$

۴- مشخص کنید آیا معادله دیفرانسیل $(2x^2t-2x^3)dt+(4x^3-6x^2t+2xt^2)dx=0$ کامل است.

حل: این معادله دیفرانسیل برای تابع مجهول $x(t)$ است. برای عبارتهای $M(x,t)=2x^2t-2x^3$ و $N(x,t)=4x^3-6x^2t+2xt^2$ شامل متغیر های x,t داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x^2t-2x^3)=4xt-6x^2=\frac{\partial}{\partial t}(4x^3-6x^2t+2xt^2)$$

۵- معادله دیفرانسیل $y^2dx+xydy=0$ را به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کنید.

حل: در اینجا $M(x,y)=y^2$ و $N(x,y)=xy$،بنابراین:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\frac{\partial N}{\partial x}=y \quad (۱)$$

پس معادله (۱) کامل نیست، اما داریم:

$$\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=\frac{1}{y}$$

فقط تابعی بر حسب y است. با استفاده از معادله $I(x,y)=\int_e h(y)dy$ داریم:

$$I(x,y)=e^{-\int \frac{1}{y}dy}=e^{-Iny}=\frac{1}{y}$$

۶- یک عامل انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل $y'+\frac{4}{x}y=x^4$ بیابید.

حل: معادله دیفرانسیل دارای فرم معادله $y'+p(x)y=q(x)$ است، با $p(x)=\frac{4}{x}$ و $q(x)=x^4$ همین طور یک معادله خطی است. لذا داریم :

$$\int p(x)dx=\int \frac{4}{x}dx=4\ln|x|=\ln x^4 \Rightarrow I(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\ln x^4}=x^4$$

۷- معادله دیفرانسیل $y'+y=\sin x$ را حل کنید.

حل: در اینجا داریم $p(x)=1$ از این رو $I(x)=e^{\int 1dx}=e^x$. حال طرفین معادله دیفرانسیل را در $I(x)$ ضرب می کنیم و به دست می آوریم:

$$e^x y'+e^x y=e^x \sin x \Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^x)=e^x \sin x$$

از طرفین معادله نهایی نسبت به x انتگرال می گیریم(برای انتگرال گیری از طرف راست،از انتگرال جز به جز استفاده می کنیم)،لذا داریم:

$$ye^x=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c \Rightarrow y=ce^{-x}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$$

۸- معادله دیفرانسیل $y'-5y=0$ را حل کنید.

حل: در اینجا $p(x)=-5$، از این رو $I(x)=e^{\int -5dx}=e^{-5x}$. حال طرفین معادله دیفرانسیل را در $I(x)$ ضرب می کنیم،در این صورت داریم:

$$e^{-5x}y'-5e^{-5x}y=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{-5x})=0$$

از طرفین معادله اخیر نسبت به x انتگرال می گیریم و داریم :

$$ye^{-5x}=c \Rightarrow y=ce^{5x}$$

توجه کنید که معادله دیفرانسیل جدایی پذیر نیز می باشد.

۹- معادله دیفرانسیل $\frac{dQ}{dt}+\frac{2}{10+2t}Q=4$ را حل کنید.

حل: این یک معادله خطی به فرم معادله $y'+p(x)y=q(x)$ است،که در آن Q به جای y نشسته و همینطور $p(x)=\frac{2}{10+2t}$ و $q(t)=4$.لذا فاکتور انتگرال ساز آن برابر است با،

$I(t)=e^{\int\frac{2}{10+2t}}=e^{1n(10+2t)}=10+2t;(t<-5)$ ، حال طرفین معادله را در $I(x)$ ضرب می کنیم و داریم :

$$(10+2t)\frac{dQ}{dt}+2Q=40+8t\rightarrow\frac{d}{dt}[(10+2t)Q]=40+8t$$

با انتگرال گیری از طرفین بالا داریم:

$$(10+2t)=40t+4t^2+c$$

لذا داریم:

$$Q(t)=\frac{40t+4t^2+c}{10+2t};(t<-5)$$

۱۰- معادله دیفرانسیل $y'+xy=xy^2$ را حل کنید.

حل : این معادله خطی نیست بلکه یک معادله برنولی به فرم $y'+p(x)y=q(x)y^n$ می باشد. و همچنین $q(x)=x$ و $p(x)=x$ و $n=2$. با تغییر متغیر $z=y^{1-2}=y^{-1}$ داریم:

$$y=\frac{1}{z},y'=\frac{z'}{z^2}$$

حال با تغییرات بالا در معادله اصلی اعمال می کنیم،داریم:

$$-\frac{z'}{z^2}+\frac{x}{z}=\frac{x}{z^2}\Rightarrow z'-xz=-x$$

معادله اخیر یک معادله خطی است. جواب این معادله به صورت $z=ce^{\frac{x^2}{2}}+1$ می باشد.جواب معادله دیفرانسیل اصلی عبارت است از :

$$y=\frac{1}{z}=\frac{1}{ce^{\frac{x^2}{2}+1}}$$

۱۱- مرتبه هر کدام از معادلات دیفرانسیل زیر را مشخص کنید و تعیین کنید که آیا خطی هستند یا نه ؟

الف) $2xy'' + x^2y' - (\sin^2 x)y = 2$

ب) $yy'' + xy' + y = x^2 + 3$

ج) $2e^x y''' + e^x y''$

حل: الف) مرتبه ۲. در این معادله $b_2(x) = 2x$ و $b_1(x) = x^2$ و $b_0(x) = -\sin^2 x$ و $g(x) = 2$.چون هیچکدام از این جملات به y یا مشتقات y وابسته نیست، لذا خطی است.

ب)مرتبه سوم. $b_3 = y$ که به y وابسته است،معادله غیر خطی است.

ج)مرتبه سوم. در معادله اینجا $b_3(x) = 2e^x$ و $b_2(x) = e^x$ و $b_0(x) = 0$ و $g(x) = 1 + x$.چون هیچکدام از این جملات به y یا مشتقات y وابسته نیست بنابراین خطی است.

۱۲- رونسکین مجموعه $\{\sin 4x, \cos 4x\}$ را به دست آورید.

$$w(\sin 4x, \cos 4x) = \begin{pmatrix} \sin 4x & \cos 4x \\ 4\cos 4x & -4\sin 4x \end{pmatrix} = -4(\sin^2 4x + \cos^2 4x) = -4$$

۱۳- اگر $y_1(x) = \sin 4x$ و $y_2(x) = \cos 4x$ دو جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 9y = 0$ باشند.جواب عمومی آن را به دست آورید.

حل: رونسکین دو جواب معادله در مثال قبل برابر -4 است که در هر بازه ای مخالف صفر می باشد.بنا بر قضیه ی ۳,۴ دو جواب مستقل خطی اند. بنابراین نتیجه میگیریم که جواب عمومی معادله به صورت $y(x) = c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x$ می باشد.

۱۴- معادله $y'' - y' - 2y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $\lambda^2 - \lambda = 0$ می باشد ک می تواند به صورت $(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ تجزیه شود.از آنجایی که ریشه ها $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 2$ موجود و متمایز هستند جواب عمومی به صورت زیر می باشد.

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

۱۵- معادله $y'' - 7y' = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه به صورت $\lambda^2 - 7\lambda = 0$ می باشد که می تواند به صورت $(\lambda - 0)(\lambda - 7) = 0$ تجزیه شود. از آنجایی که $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = 7$ موجود و متمایز هستند جواب عمومی به صورت زیر می باشد.

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{7x} \Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{7x}$$

۱۶- معادله $y'' + 10y' + 21y = 0$ را حل کنید.

حل: متغیر مستقل در اینجا به جای x، t است،معادله مشخصه به فرم :

$$\lambda^2 + 10\lambda + 21 = 0$$

است که تجزیه آن به صورت $(\lambda + 3)(\lambda + 7) = 0$ می باشد. که $\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = -7$ دو ریشه متمایز و حقیقی معادله مشخصه می باشند، پس جواب عمومی به صورت

$$y = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-7t}$$

۱۷- معادله $y'' - 6y' + 25y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه به صورت $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$ می باشد که از فرمول جواب معادله درجه دوم برای یافتن ریشه های معادله اصلی استفاده می کنیم، در نتیجه "

$$\lambda = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(25)}}{2} = 3 \pm 4i$$

این ریشه ها مختلط و مزدوج می باشند پس جواب عمومی به صورت زیر می باشد:

$$y = c_1 e^{3t} \cos 4t + c_2 e^{3t} \sin 4t$$

۱۸- معادله دیفرانسیل $y''' + 6y'' + 11' - 6y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه برابر است با $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ که می توان آن را به صورت زیر تجزیه کرد:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

در این صورت ریشه ها برابر است با : $\lambda_3 = 3$ و $\lambda_2 = 2$ و $\lambda_1 = 1$.در نتیجه جواب عمومی به صورت زیر می باشد:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

۱۹- معاادله $y''' - 6'' + 2y' + 36y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مشخصه $\lambda^3-6\lambda^2+2\lambda+36=0$ دارای ریشه های $\lambda_3=4-i\sqrt{2}$ و $\lambda_2=4+i\sqrt{2}$ و $\lambda_1=-2$ است
لذا جواب برابر است با :

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{(4+i\sqrt{2})x}+c_3e^{(4-i\sqrt{2})x}$$

که آن را می توان با استفاده از روابط اویلر به شکل زیر نوشت:

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{4x}\cos\sqrt{2}x+c_3e^{4x}\sin\sqrt{2}x$$

۲۰- معادله زیر را حل کنید.

$$y^{(4)}+8y'''+24y''+32y'+16y=0$$

حل : معادله مشخصه عبارت است از $\lambda^4+8\lambda^3+24\lambda^2+32\lambda+16=0$ که به $(\lambda-2)^4=0$ تبدیل می شود. لذا $\lambda=-2$ ریشه مرتبه چهارم معادله مشخصه است، در نتیجه جواب عمومی عبارت است از "

$$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+c_3x^2e^{-2x}+c_4x^3e^{-2x}$$

۲۱- معادله زیر را در صورتی که xe^{2x} یکی از جواب ها باشد حل کنید.

$$\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^3y}{dx^3}-5\frac{d^2y}{dx^2}+36\frac{dy}{dx}-36y=0$$

حل : اگر xe^{2x} یک جواب معادله باشد در آن صورت e^{2x} نیز یک جواب معادله است. پس $(\lambda-2)^4$ یک فاکتور از معادله $\lambda^4-4\lambda^3-5\lambda^2+36\lambda-36=0$ می باشد. اکنون

$$\lambda^4-4\lambda^3-5\lambda^2+36\lambda-36=(\lambda-2)^2(\lambda^2-9)$$

بنابراین دو ریشه دیگر معادله مشخصه برابرند $(\lambda=\pm3)$ با جوابهای e^{3x} و e^{-3x} پس از مشخص کردن چهار جواب مستقل برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهارم داده شده می توان جواب کلی را به صورت زیر نوشت:

$$y(x)=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$$

۲۲- تعیین کنید آیا x=0 یک نقطه غیرعادی منظم برای معادله دیفرانسیلی $x^3y''+2x^2y'+y=0$ می باشد؟

حل: با تقسیم بر x^3 داریم:

$$Q(x)=\frac{1}{x^3} \qquad p(x)=\frac{2}{x}$$

هیچکدام از این توابع در x=0 تعریف نشده اند، بنابراین این نقطه یک نقطه غیرعادی است. دراینجا وو $x^2.Q(x)=\frac{1}{x}$ و $x.p(x)=2$ می باشند ، که اولی در هرنقطه تحلیلی می باشد ولی دومی در نقطه x=0 تعریف شده نمی باشد. درنتیجه دراین نقطه تحلیلی نمی باشد. بنابراین x=0 یک نقطه غیرعادی برای معادله دیفرانسیل داده شده نمی باشد.

۲۳- تعیین کنید آیا x=0 یک نقطه غیرعادی منظم برای معادله دیفرانسیلی $8x^2y''+10xy'+(x-1)y=0$ می باشد یا خیر؟

حل: باتقسیم بر $8x^2$ داریم:

$$Q(x)=\frac{1}{8x}-\frac{1}{8x^2} \qquad p(x)=\frac{5}{4x}$$

هیچ کدام از این توابع در x=0 تعریف نشده اند بنابراین x=0 یک نقطه غیرعادی می باشد. علاوه براین داریم:

$$x^2.Q(x)=\frac{1}{8}(x-1) \qquad x.p(x)=\frac{5}{4}$$

که هردوی آن ها در هرنقطه ای تحلیلی می باشند. اولی ثابت و دومی چندجمله ای می باشد. از این رو در x=0 نیز تحلیلی می باشند. پس x=0 یک نقطه غیرعادی منظم است.

۲۴- معادله مشخص $x^2y''+x.e^x.y'+(x^3-1)y=0$ را مجاورت x=0 پیدا کنید.

حل: داریم:

$$Q(x)=x-\frac{1}{x^2} \qquad p(x)=\frac{e^x}{x}$$

همچنین داریم:

$$x.p(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

$$x^2.Q(x)=x^3-1=-1+0x+0x^2+1x^3+0x^4+\dots$$

وقتی $p_0=1$ و $q_0=-1$ با استفاده از معادله (۱) مثال قبل می توان معادله ویژه آن را به دست آوریم:

$$\lambda^2-1=0$$

۲۵- جواب عمومی مساله مقدار اولیه ی زیر را پیدا کنید.

$$y(2)=5,\ y'(2)=60 \qquad y''-(x-2)y'+2y=0$$

حل: از آنجایی که شرایط اولیه در x=2 تعیین شده است. لذا جواب معادله از روش های سری های توانی حول نقطه x=2 ساده تر به دست می آید. این کار قبلا درمعادله (۱) از مثال ۱۸،۵ انجام شد. در این روش با به کار بردن شرایط اولیه مستقیما مشاهده می کنیم که $a_0=5, a_1=60$ است. بنابراین جواب به صورت:

$$y=5[1-(x-2)^2]+60[(x-2)-\frac{1}{6}(x-2)^3-\frac{1}{120}(x-2)^5-...]$$
$$=5+60(x-2)^2]-5(x-2)^2-10(x-2)^3-\frac{1}{2}(x-2)^5-...$$

۲۶- معادله ی $y^{''}-y^{'}-2y=e^{3x}$ را حل کنید.

حل: با استفاده از بخش ۴-۴ داریم $y_h=c_1ed^{-x}+c_2e^{2x}$ اینجا $\phi(x)$ فرم نمایش داده شده در حالت ۲ است که k=1 و a=3 می باشد. با استفاده از ۲۰،۴ داریم:

$$y_p=Ae^{3x} \qquad (۱)$$

بنابراین $y_p^{''}=9Ae^{3x}, y_p^{'}=3Ae^{3x}$. با جایگذاری این نتایج درمعادله ی دیفرانسیل داریم:

$$9Ae^{3x}-3Ae^{3x}-2Ae^{3x}=e^{3x} \qquad 4Ae^{3x}=e^{3x}$$

از این معادله ها نتیجه می گیریم $4A=1$ یا $A=\frac{1}{4}$ است. لذا $y_p=\frac{1}{4}e^{3x}$ است. پس جواب عمومی به صورت زیر می شود:

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{4}e^{3x}$$

۲۷- جواب عمومی معادله $y^{''}+xy^{'}+(2x-1)y=0$ حول نقطه x=-1 بیابید.

حل: برای ساده تر کردن عبارت جبری، جایگزینی $t=x-(-1)=x+1$ را انجام می دهیم. مانند مثال قبل داریم $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}, \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$ با جایگزینی این نتایج در معادله دیفرانسیلی عبارت زیر را به دست می اوریم:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(t-1)\frac{dy}{dt}+(2t-3)y=0$$

سری های توانی برای این معادله در مثال های (۹،۵) و(۱۰،۵) وجود دارد:

$$y=a_0(1+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{6}t^4+...)+a_1(t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3+0t^4+...)$$

با جایگذاری $t=(x+1)$ جواب اصلی مساله را به دست می آوریم:

$$y=a_0(1+\frac{3}{2}(x+1)^2+\frac{1}{6}(x+1)^3+\frac{1}{6}(x+1)^4+...)$$
$$+a_1((x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)^3+0(x+1)^4+...)$$

۲۸- بررسی کنید که آیا x=0 یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل زیر است.

$$x^2y''+2y'+xy=0$$

حل: اینجا $Q(x)=\frac{1}{x},P(x)=\frac{2}{x^2}$ است. از آنجایی که هیچ کدام از توابع در x=0 تحلیلی نیستند. لذا x=0 یک نقطه غیرعادی است اما یک نقطه غیرعادی منظم است.

۲۹- معادله $y'-5y=3e^x-2x+1$ را حل کنید.

حل: به وضوح داریم $y_h=c_1e^{5x}$. اینجا می توانیم $\phi(x)$را به عنوان جمع دوتابع کنترل پذیر بنویسیم برای عبارت $3e^{3x}$ یک جواب به فرم Ae^x و برای عبارت 2x+1- جوابی به فرم B_1x+B_0 را فرض می کنیم بنابراین:

$$y_p=Ae^x+B_1x+B_0$$

با جایگذاری (۱) در معادله ی دیفرانسیل و ساده کردن خواهیم داشت:

$$(-4A)e^x+(-5B_1)x+(B_1-5B_0)=(3)e^x+(-2)x+1$$

با مساوی قرار دادن ضرایب عبارت های همسان به دست میآید. $A=-\frac{3}{4},B_1=-\frac{2}{5},B_0=-\frac{3}{25}$. بنابراین (۱) به صورت:

$$y_p=-\frac{3}{2}e^x-\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}$$

و جواب عمومی برابر است با:

$$y_p=c_1e^{5x}-\frac{3}{2}e^x-\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}$$

۳۰- معادله ی $y''=9x^2+2x-1$ را حل کنید.

حل: به وضوح داریم $y_h=c_1x+c_0$ جواب خصوصی به صورت:

$$y_p = A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2 \qquad (۱)$$

با جایگذاری رابه (۱) در معادله ی دیفرانسیل بدست می آید:

$$12A_2x^2 + 6A_1x + 2A_0 = 9x^2 + 2x - 1$$

پس $A_0 = \frac{-1}{2}, A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{3}{4}$. با جایگذاری این ضرایب در معادله ی (۱) داریم:

$$y_p = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{-1}{2}x^2$$

جواب عمومی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$y = c_1x + c_0 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{-1}{2}x^2$$

جواب همچنین می تواند با دو بار انتگرال گیری از دو طرف معادله نسبت به X به سادگی به دست آید.

این جزوه توسط دانشجوی دانشگاه پیام نور مرکز بیرجند، علی ثابت شوکت آباد، تهیه شده است.