بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۹

معادلات دیفرانسیل

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه نهم

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری ها

حل معادله دیفرانسیل با استفاده از سریها

درفصل قبل با حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبـــه دوم بـــا ضـــرایب ثابت، درچند حالت خاص با ضرایب متغیر آشنا شدیم. دراین فصـــل بـــا روش حل برای معادلات دیفرانســـیل خطـــی مرتبـــه دوم (وبـــالاتر)، بـــا استفاده از سریهای توانی آشنا می شویم.

دردرس ریاضیات عمومی با مفهوم سری آشنا شده ایم . بـــرای اینکـــه مطالب این فصـــل را بهتـــر درک کنـــیم، بحـــث را بـــا مـــرور مختصـــری برسریهای توانی شروع می کنیم.

سری توانی

سری به صورت

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2 + \cdots + a_n\,(x - x_0)^n + \cdots$$

یا

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$

که درآن x_0 ، a_0 ، ... ، a_n و ... اعداد ثابتی بوده و x متغیر است را سری توانی به مرکز x_0 نامیم.

سری توانی ممکن است که دریکی از سه حالت زیر صدق کند:

۱- تنها به ازای $x - x_0$ همگرا باشد.

۲- به ازای هر x دریک همسایگی x_0 مطلقا همگرا باشد، یعنی برای $|x - x_0| < R$ همگرا و برای $|x - x_0| > R$ واگرا باشد عدد R را شعاع همگرایی سری نامیم.

۳- به ازای هر x مطلقا همگرا باشد.

مجموعه مقادیر x را که سری توانی همگرا است، بازه (فاصله) همگرایی سری می نامیم.

تذکر: اگر سری به ازای $x = x_0 \pm R$ همگرا باشد آنگاه بازه همگرایی برابر است با

$$x_0 - R \leq x \leq x_0 + R$$

دردرس ریاضی عمومی با پیدا کردن بازه همگرایی سری توانی آشنا شده ایم که شعاع همگرایی عبارت است از

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

ممکن است $R = \infty$ آنگاه حد بالا باید نامتناهی باشد.

مثال: بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} n!\ x^n$ را پیدا کنید .

چون

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

بنابراین ، سری تنها به ازای $x = 0$ همگرا است.

مثال : بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n!}$ را پیدا کنید.

چون

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right|=+\infty$$

پس سری روی مجموعه اعداد حقیقی، یعنی در همه جا همگرا است .

مثال : بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{n+1}$ را پیدا کنید.

چون

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+1)}{(n+1)^2}\right|=1$$

پس، سری روی مجموعه x هایی که $|x-2|<1$ همگرا است .

قضیه : اگر سری توانی بربازه $|x-x_0|<R$ که درآن R یک عدد ثابت مثبت است همگرا باشد، آنگاه سری توانی تابعی مانند $f(x)$ را تعریف می کنند که به ازای هر x دربازه مذکور پیوسته است.

تذکر: به طور طبیعی این سوال مطرح می شود که سری توانی به کدام تابع پیوسته همگرا است.

پاسخ دادن به این سوال درحالت کلی آسان نیست.

قضیه : اگر $f(x)$ به صورت زیر توسط یک سری توانی تعریف شده باشد،

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n \qquad , \qquad |x-x_0|<R$$

آنگاه می توان از سری بالا جمله به جمله مشتق گیری کرد

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\,(x-x_0)^{n-1}$$

و همین طور انتگرال گرفت یعنی:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\,(x-x_0)^{n+1}$$

که

$$a,b\ \in (x_0-R, x_0+R)$$

قضیه : فرض کنیم :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n \quad , \qquad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x-x_0)^n$$

آن گاه

الف) به ازای هر عدد حقیقی C داریم:

$$Cf(x)=\sum_{n=0}^{\infty} Ca_n\,(x-x_0)^n$$

ب)

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$$

ج)

$$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

که درآن:

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0=\sum_{n=0}^{\infty} a_k b_{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}b_k$$

تذکر۱: با انتقال اندیس می توان نشان داد که :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n-k=0}^{\infty} a_{n-k} (x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} (x-x_0)^{n-k}$$

بعبارت دیگر: اگر به جای n در سری اول، $n-k$ را قرار دهیم، دو سری مساوی به دست می آید.

تذکر۲: درکار کردن با سریهای توانی حول نقطه مخالف با صفر x_0 ، غالبا به کار بردن تغییر متغیر $z = x - x_0$ مفید است.
یعنی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

قضیه: فرض کنیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ **برای** $|x-x_0|<R$ **با** $R>0$ **همگرا به تابع** $f(x)$ **باشد، بسادگی نشان داده می شود که**

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad ,0,1,2,\ldots$$

و درحالت خاص اگر $x_0=0$ **آنگاه**

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad ,0,1,2,\ldots$$

تعریف: سری

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

را بسط سری تیلر تابع $f(x)$، حول نقطه x_0 و سری

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n$$

را بسط مک لورن تابع $f(x)$ حول نقطه صفر می نامیم.

تعریف: اگر سری

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

به ازای هر x در بازه (x_0-R, x_0+R) به $f(x)$ همگرا باشد می گوییم f درنقطه x_0 تحلیلی است.

مثال : بسط سری مک لورن برخي توابع عبارت است از:

الف) $$e^{x}=\sum_{n=\infty}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$ که $|x|<\infty$

ب) $$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}$$ که $|x|<\infty$

ج) $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ که $|x|<\infty$

د) $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$$ که $|x|<1$

ه) $$\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ که $|x|<\infty$

و) $$\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ که $|x|<\infty$

نقاط معمولی و منفرد

تعریف: نقطه x_0 را یک نقطه معمولی (عادی) برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$$

می گویم هرگاه ضرایب $f_i(x)$ و $g(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. نقطه ای را که معمولی نباشد نقطه منفرد (غیر عادی)معادله می نامیم.

مثال : نقاط منفرد معادله دیفرانسیل

$$x^3(x^2-1)y''+x(x+1)y'+(x-1)y=0$$

را پیدا کنید.

حل: معادله را با تقسیم بر $x^3(x^2-1)$ بصورت ضریب مشتق بالا ترین برابر یک می کنیم یعنی:

$$y''+\frac{1}{x^2(x-1)}y'+\frac{1}{x^3(x+1)}y=0$$

بدیهی است که همه ضرایب این معادله درهمه نقاط به جز نقاط $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ تحلیلی می باشند. پس آنها نقاط منفرد وهمه نقاط دیگر نقاط معمولی معادله هستند.

قضیه: اگر هریک از توابع g، f_0، ... ، f_{n-1} درنقطه x_0 تحلیلی باشند، آن گاه یک جواب منحصر به فرد مانند $y(x)$ برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام

$$y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_1(x)y'+f_0(x)y=g(x)$$

وجود دارد که در x_0 تحلیلی است و در n شرط اولیه

$$y(x_0)=a_0\ ,y'(x_0)=a_1,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1}$$

صدق می کند. یعنی این جواب منحصر به فرد توسط سری تیلر خود درنقطه x_0 دربازه I بیان می شود.

جواب های سری معادلات دیفرانسیل (دریک نقطه معمولی)

مثال : معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = y$ را با پیدا کردن جواب بصورت سری مک لورن حل می کنیم.

حل: فرض

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n\, x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

که $R > 0$ ، $|x| < R$

چون $y' = y$ پس باید :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

$$\begin{cases} a_0 = a_1 \\ a_1 = 2a_2 \\ a_2 = 3a_3 \\ \vdots \\ a_n = (n+1)a_{n+1} \\ \vdots \end{cases}$$

و با حل کردن دستگاه از بالا به پایین نتیجه می شود که:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)(n-2)} = \cdots = \frac{a_0}{n!}$$

حال با جایگذاری ضرایب بدست آمده در سری داریم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

که a_0 پارامتر دلخواهی می باشد و مقید به هیچ قیدی نشده است.

دقت کنیم که جواب بالا همان جوابی است که از روش های قبلی بدست می آید یعنی $y = a_0 e^x$ که جواب معادله جداشدنی $y' = y$ است.

مثال

$$\boxed{xy' = y}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \to x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$\begin{cases} a_0=0 \\ n a_n = a_n \to (n-1)a_n=0 \end{cases}$$

$a_1 =$ دلخواه

$a_n=0 \quad , \quad n\neq 1$

$$\boxed{y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\right)=0+cx+0+\cdots=cx}$$

پایان