جلسه ۱۴

معادلات دیفرانسیل

Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه چهاردهم

تبدیل لاپلاس

تعریف: فرض کنیم تابع f بربازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد ، تبدیل لاپلاس تابع f به نمایش $L(f(x))$ را با استفاده از یک انتگرال ناسره ، بصورت زیر تعریف می کنیم

$$L(f(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = F(s)$$

$f(x)$	$F(s)=L(f(x))$	
$f(x)=1$	$F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\,dx=\frac{1}{s}$	$s>\circ$
$f(x)=x$	$F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\,x\,dx=\frac{1}{s^2}$	$s>\circ$
$f(x)=x^n$	$F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\,x^n\,dx=\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>\circ$
$f(x)=e^{ax}$	$F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\,e^{ax}\,dx=\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$f(x)=\sin(ax)$	$F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\sin(ax)\,dx=\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>\circ$
$f(x)=\cos(ax)$	$F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\cos(ax)\,dx=\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>\circ$
$f(x)=\sinh(ax)$	$F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\sinh(ax)\,dx=\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$f(x)=\cosh(ax)$	$F(s)=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}\cosh(ax)\,dx=\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$

تبدیل لاپلاس برخی توابع

قبل از آنکه به تبدیل لاپلاس برخـی توابـع دیگـر بپـردازیم خوب است شرایطی را کـه تـابع بایـد دارا باشـد تـا تبـدیل لاپلاس داشته باشد، دقیفتر مورد توجـه قـرار دهـیم. بـرای تضمین وجود تبدیل لاپلاس، کافی اسـت فـرض کنـیم کـه پیوسته و یا لااقل قطعه به قطعـه پیوسـته اسـت. مقـصود از عبـارت اخیـر آن اسـت کـه تـابع $f(x)$ در هـر فاصـله متناهی $0 \leq x \leq b$ پیوسته است، مگر احتمالاً در تعـدادی متناهی نقطه که دارای نا پیوستگی جهشی است ،

یعنی تابع در آن نقاط حد های چپ و راست متفاوتی دارد.

این شرط لازم نیست مثلاً تابع $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ در $x=0$ دارای یک نا پیوستگی از نوع بینهایت است وبنابر این قطعه به قطعه پیوسته نیست، با این وجود انتگرالش از ۰ تا b وجود دارد و در واقع، برای، $s>0$ داریم:

$$L(x^{-\frac{1}{2}})=\int_0^{\infty} e^{-sx}x^{\frac{-1}{2}}dx$$

$$L(x^{-\frac{1}{2}})=\int_0^\infty e^{-sx}x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

تغییر متغیر $sx=t^2 \rightarrow sdx=2tdt \rightarrow dx=\frac{2tdt}{s}$ ؛

$$\boxed{L(x^{-\frac{1}{2}})=\int_0^\infty e^{-sx}x^{\frac{-1}{2}}\,dx=\int_0^\infty e^{-t^2}\left(\frac{t^2}{s}\right)^{\frac{-1}{2}}\frac{2tdt}{s}=2s^{\frac{-1}{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt}$$

در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان داده می شود که

انتگرال اخیر برابر با $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ است، لذا داریم:

$$L(x^{\frac{-1}{2}})=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

تعریف: تابع
$$u_c(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<c\\ 1 & x\ge c\end{cases}$$

که $c\ge 0$ می باشد را تابع پله ای واحد نامیم و تبدیل لاپلاس آن را پیدا می کنیم:

$$L(u_c(x))=\int_{\circ}^{\infty} e^{-sx}.u_c(x)dx=$$

$$\int_{\circ}^{c} e^{-sx}.\circ.dx+\int_{c}^{\infty} e^{-sx}.1\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} e^{-sx}dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\right)_c^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}e^{-cs}\right)=\frac{e^{-cs}}{s}$$

با شرط $s>0$

مثال: تابع زیر را برحسب توابع پله ای واحد می نویسیم؟

$$f(x)=\begin{cases} f_\circ(x) & \circ \le x < x_\circ \\ f_1(x) & x_\circ \le x < x_1 \\ f_2(x) & x_1 \le x < x_2 \\ f_3(x) & x_2 \le x < x_3 \\ f_4(x) & x_3 \le x \end{cases}$$

حل:

$$\begin{aligned} f(x) = f_\circ(x) &+ \\ &[f_1(x)-f_\circ(x)]u_{x_\circ}(x)+ \\ &[f_2(x)-f_1(x)]u_{x_1}(x)+ \\ &[f_3(x)-f_2(x)]u_{x_2}(x)+ \\ &[f_4(x)-f_3(x)]u_{x_3}(x) \end{aligned}$$

مثال: تابع

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<4 \\ 5 & 4\le x<5 \\ x^2 & x\ge 5 \end{cases}$$

را بصورت تابع پله ای واحد می نویسیم

$$f(x)=x+(5-x)u_4(x)+(x^2-5)u_5(x)$$

تذکر: از تابع پله ای واحد می توان برای انتقال تابع داده شده f ، که دامنه تعریف آن $x \geq 0$ به اندازه c واحد در جهت راست استفاده کرد. برای مثال تابع تعریف شده توسط

$$y = u_c(x) f(x-c) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < c \\ f(x-c) & x \geq c \end{cases}$$

نمایش انتقالی از تابع به اندازه c واحد در جهت مثبت x می باشد .

قضیه: نشان دهید: (با شرط : $L(f(x)) = F(s)$)

$$L(u_c(x) f(x-c)) = e^{-cs} F(s) \qquad s > 0$$

اثبات:

$$L(u_c(x) f(x-c)) = \int_0^{\infty} e^{-sx} u_c(x) f(x-c) dx = \int_c^{\infty} e^{-sx} f(x-c) dx$$

با تغییر متغیر $u = x - c$ داریم:

$$L(u_c(x) f(x-c)) = \int_0^{\infty} e^{-s(u+c)} f(u) du =$$

$$e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-cs} F(s) \qquad s > 0$$

مثال:تبدیل لاپلاس تابع

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x<2\pi\\ \sin x+\cos x & x\ge 2\pi\end{cases}$$

را پیدا می کنیم.

حل: با استفاده از مثال قبل تابع f را می توان بر حسب تابع پله ای $u_{2\pi}(x)$ به صورت $f(x)=\sin x+u_{2\pi}(x)\cos x$ نوشت. چون $\cos t=\cos(x-2\pi)$ پس

$$f(x)=\sin x+u_{2\pi}(x)\cos(x-2\pi)$$

بنابر خواص و فرمول های تبدیل لاپلاس و قضیه قبلی

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}+e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1}\qquad s>0$$

قضیه: اگر $F(s)=L(f(x))$ و $G(s)=L(g(x))$ هر دو به ازای $s\geq 0$ موجود باشد آنگاه

$$F(s)G(s)=L(h(x))$$

که در آن
$$h(x)=\int_0^x f(x-u)g(u)du$$

تابع h به **کنولوسیون** f و g معروف است وآن را با

$$h=f*g$$

نشان می دهیم .

نشان می دهیم که $f * g(x) = g * f(x)$
زیرا

$$f * g(x) = \int_{0}^{x} f(x-u)\, g(u)\, du$$

با بکار بردن تغییر متغیر $x - u = v$ انتگرال بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f * g(x) = \int_{x}^{0} f(v) g(x-v)(-dv)$$

$$= \int_{0}^{x} g(x-v) f(v) dv$$

$$= g * f(x)$$

مثال:با بکار بردن کنولوسیون تبدیل معکوس تابع

$$H(s)=\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

را پیدا می کنیم؟

حل:با فرض $F(s)=\frac{1}{s^2}$ و $G(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$ تبدیل لاپلاس

$L(x)=\frac{1}{s^2}$ و $L(\sin ax)=\frac{a}{s^2+a^2}$ داریم:

$$h(x)=f*g(x)=\int_0^x (x-u)\sin au\,du$$

با بکار بردن روش جزبه جز داریم:

$$h(x)=\frac{ax-\sin ax}{a^2}$$

تذکر: مثال بالا را می توان با بکار بردن کسرهای جزیی بصورت زیر محاسبه کرد :

$$H(s)=\frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{s^2}-\frac{a}{s^2+a^2}\right)$$

بنابر این

$$h(x)=\frac{1}{a^2}(ax-\sin ax)$$

قضیه: نشان دهید که اگر c یک عدد مثبت باشد آنگاه

$$L(f(cx))=\frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$$

اثبات:

$$L(f(cx))=\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f(cx)dx$$

با به کار بردن تغییر متغیر $cx=u$ انتگرال بالا به صورت

$$L(f(cx))=\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-s}{c}u}f(u)\frac{1}{c}du=$$

$$\frac{1}{c}\int_{0}^{\infty}e^{\frac{-s}{c}u}f(u)du=\frac{1}{c}F(\frac{s}{c}) \qquad \frac{s}{c}>a\ ,s>ca$$

پایان