mbdm
Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۱۲

معادلات دیفرانسیل

Mathematics by Dr. Moslehi: Teaching & Research

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه دوازدهم

تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس

تبدیل مفهوم تعمیم یافته تابع می باشد ، یعنی رابطه ای که به هر تابع ، تابع دیگری را نسبت دهد، یک تبدیل نامیم. از جمله تبدیلات مشهور تبدیل مشتق و انتگرال و مضرب در عبارتی می باشد که معمولاً با نماد زیر بترتیب نشان می دهیم.

۱) $D(f(x)) = F'(x)$

۲) $\int f(x)dx = F(x) + c$

۳) ضرب در $e^{\alpha x}$ $M(f(x)) = e^{\alpha x} f(x)$

تعریف: فرض کنیم تابع f بربازه $[0,\infty)$ تعریف شده باشد، تبدیل لاپلاس تابع f به نمایش $L(f(x))$ را با استفاده از یک انتگرال ناسره ، بصورت زیر تعریف می کنیم

$$L(f(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = F(s)$$

لازم به یاد آوری است که :

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-sx} f(x)\,dx$$

شرایط وجود تبدیل لاپلاس را بعداً مطالعه خواهیم کرد. اینک تبدیل لاپلاس چند تابع خاص را پیدا می کنیم .

تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=1$ را پیدا می کنیم یعنی :

$$L(1)=F(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-sx}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-sx}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_{0}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}e^{0}\right)$$

به ازای $s>0$ انتگرال همگراست پس:

$$L(1)=\frac{1}{s}$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=x$ را پیدا می کنیم :

$$L(x)=F(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-sx}\cdot x\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} xe^{-sx}\,dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}xe^{-sx}\Big|_{0}^{b}+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{s}e^{-sx}dx\right]=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}xe^{-sx}-\frac{1}{s^{2}}e^{-sx}\right]_{0}^{b}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{s}be^{-sb}-\frac{1}{s^{2}}e^{-sb}+\frac{1}{s}xe+\frac{1}{s^{2}}e^{0}\right]$$

به ازای $s>0$ انتگرال همگراست پس

$$L(x)=\frac{1}{s^{2}}$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=x^n$ را پیدا می کنیم

$$L(x^n)=\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x^n dx \qquad \begin{cases} u=x^n & du=nx^{n-1}dx \\ dv=e^{-sx}dx & v=-\frac{1}{s}e^{-sx} \end{cases}$$

$$=-\frac{x^n e^{-sx}}{s}\Bigg]_0^\infty+\frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-sx}\cdot x^{n-1}dx=0+L(x^n)$$

$$=\frac{n}{s}L(x^{n-1})=\frac{n}{s}\left(\frac{n-1}{s}\right)L(x^{n-2})=\cdots=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}L(1)$$

به ازای $s>0$ انتگرال همگراست پس : $L(x^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$

$f(x)$	$F(s)=L(f(x))$	
$f(x)=1$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dx=\dfrac{1}{s}$	$,\quad s>0$
$f(x)=x$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,x\,dx=\dfrac{1}{s^2}$	$,\quad s>0$
$f(x)=x^n$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,x^n\,dx=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$,\quad s>0$
$f(x)=e^{ax}$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,e^{ax}\,dx=\dfrac{1}{s-a}$	$,\quad s>a$
$f(x)=\sin(ax)$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\sin(ax)\,dx=\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$,\quad s>0$
$f(x)=\cos(ax)$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\cos(ax)\,dx=\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$,\quad s>0$
$f(x)=\sinh(ax)$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\sinh(ax)\,dx=\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$,\quad s>\lvert a\rvert$
$f(x)=\cosh(ax)$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\cosh(ax)\,dx=\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$,\quad s>\lvert a\rvert$

خواص تبدیل لاپلاس

با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس توسط انتگرال تعریف شده

است لااقل دارای خواص خطی انتگرال را می باشد.

قضیه: (خطی بودن تبدیل لاپلاس) نشان دهید که :

$$L(\alpha f(x)+g(x))=\alpha L(f(x)+L(g(x))$$

اثبات : چون α عدد ثابت می باشد پس

$$L(\alpha f(x)+g(x))=\int_0^\infty e^{-sx}(\alpha f(x)+g(x))dx=$$

$$=\alpha\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx+\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx=\alpha L(f(x))+L(g(x))$$

گرچه این خاصیت اثبات کوتاهی دارد ولی دارای خواص خیلی قوی می باشد و می توان تبدیل لاپلاس بسیاری از توابع را بوسیله آن پیدا کرد.

مثال:

$$L(f(x)) = L(5x^2+12) = 5L(x^2)+12L(1)$$

$$= 5\times\frac{2!}{s^3}+12\times\frac{1}{s} = \frac{10}{s^3}+\frac{12}{s}$$

$$L(g(x)) = L(3e^{2x}+3x) = 3L(e^{2x})+3L(x)$$

$$= 3\times\frac{1}{s-2}+3\times\frac{1}{s^2} = \frac{3}{s-2}+\frac{3}{s^2}$$

حال تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = e^{i\alpha x}$ عبارت است از

$$L(e^{i\alpha x}) = \frac{1}{s-i\alpha} = \frac{1}{s-i\alpha} \times \frac{s+i\alpha}{s+i\alpha} = \frac{s+i\alpha}{s^2+\alpha^2} = \frac{s}{s^2+\alpha^2} + i\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

و از طرفی

$$L(e^{i\alpha x}) = L(\cos\alpha x + i\sin\alpha x) = L(\cos\alpha x) + i\,L(\sin\alpha x)$$

بنابر تساوی دو طرف اول تساویها داریم:

$$L(\sin\alpha x) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \qquad L(\cos\alpha x) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

مثال:

$$L(f(x)) = L(\sinh \alpha x) = L(\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}) = \frac{1}{2}\left[L(e^{\alpha x}) - L(e^{-\alpha x})\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}) = \frac{1}{2}(\frac{s+\alpha-s+\alpha}{s^2-\alpha^2}) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$$

$$L(g(x)) = L(\cosh \alpha x) = L(\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}) = \frac{1}{2}\left[L(e^{\alpha x}) + L(e^{-\alpha x})\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha}) = \frac{1}{2}(\frac{s+\alpha+s-\alpha}{s^2-\alpha^2}) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$$

با شرط $s > |\alpha|$

به عنوان دومین خاصیت ا ز تبدیل لاپلاس خاصیت **انتقال** می باشد.

قضیه :فرض کنید $F(s)=L(f(x))$ آنگاه

$$L(e^{\alpha x}f(x))=F(s-\alpha)$$

اثبات:

$$L(e^{\alpha x}f(x))=\int_{0}^{\infty}e^{-sx}\cdot e^{\alpha x}f(x)dx=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-(s-\alpha)x}f(x)dx=F(s-\alpha)$$

چون $$F(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f(x)dx$$

مثلا: الف)

$$L(\sin 5x) = \frac{5}{s^2+25} = F(s) \quad \Rightarrow \quad L(e^{7x}\sin 5x) = \frac{5}{(s-7)^2+25} = F(s-7)$$

ب)

$$L(\cos 4x) = \frac{s}{s^2+16} = F(s) \quad \Rightarrow \quad L(e^{3x}\cos 4x) = \frac{s-3}{(s-3)^2+16} = F(s-7)$$

ج)

$$L(e^{-2x}x^5) = \frac{5!}{(s+2)^6}$$

به عنوان سومین خاصیت از تبدیل لاپلاس خاصیت **مضرب** می باشد .

قضیه :فرض کنید $F(s)=L(f(x))$ آنگاه

$$L(x f(x))=-\frac{d}{ds}F(s)$$

اثبات:

$$-\frac{d}{ds}F(s)=-\frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx=-\int_0^{\infty}\frac{d}{ds}e^{-sx} f(x)dx$$

$$=-\int_0^{\infty}(-x)e^{-sx} f(x)dx=\int_0^{\infty} e^{-sx}(xf(x))dx=L(xf(x))$$

نتیجه :

$$L(x^2 f(x)) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds} F(s)$$

اثبات:

$$L(x^2 f(x)) = L(x \cdot xf(x)) = (-1)\frac{d}{ds} L(xf(x)) =$$

$$= (-1)\frac{d}{ds}\frac{d}{ds} L(f(x)) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

به استقراء نتیجه می شود که

$$L(x^n f(x)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L(f(x))$$

مثال:

الف)

$$L(x\sin x) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = -\frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

ب)

$$L(x\cos x) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

ج)

$$L(x^2\sin x) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) = -\frac{2(s^2+1)^2-8s^2(s^2+1)}{(s^2+1)^4} = \frac{-6s^4-4s^2+2}{(s^2+1)^4}$$

از آنجائیکه معادله دیفرانسیل ازترکیباتی از x یعنی $f(x)$ ومشتق یعنی y' و مشتقات مراتب بالا تشکیل شده است بنابراین در این قسمت تبدیل لاپلاس مشتق را بررسی می کنیم .

قضیه : نشان دهید $L(y')=sL(y)-y(0)$

اثبات: چون

$$L(y')=\int_0^\infty e^{-sx}\cdot y'dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b e^{-sx}\cdot y'dx\right)$$

با استفاده از روشی جز به جز داریم :

$$\begin{cases} u=e^{-sx} & du=-se^{-sx}dx \\ dv=y'dx & v=y \end{cases}$$

پس

$$L(y')=\lim_{b\to+\infty}\left(ye^{-sx}\Big|_0^b+\int_0^b Se^{-sx}ydx\right)$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(y(b)e^{-sb}-y(0)e^{0}+s\int_0^b e^{-sx}ydx\right)$$

اگر $s>0$ آنگاه : $L(y')=-y(0)+sL(y)=sL(y)-y(0)$

نتیجه : نشان دهید. $L(y'') = s^2 L(y) - sy(\circ) - y'(\circ)$

اثبات:

$$L(y'') = L((y'))' = sL(y') - y'(0) = s(sL(y) - y(\circ)) - y'(\circ)$$

$$= s^2 L(y) - sy(\circ) - y'(\circ)$$

به استقراء نتیجه می شود که:

$$L(y^{(n)}) = s^n L(y) - s^{n-1} y(\circ) - s^{n-2} y'(\circ) - \cdots - sy^{(n-2)}(\circ) - y^{(n-1)}(\circ)$$

معکوس تبدیل لاپلاس

فرض کنیم تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ وجود داشته باشد. در این صورت واضح است که تابع منحصر بفردی مانند $F(s)$ وجود دارد که $F(s)=L(f(x))$

اینک عکس این حالت را در نظر می گیریم. فرض کنید تابعی مانند $F(s)$ داده شده باشد. آیا تابع منحصر بفردی مانند $f(x)$ وجود دارد به گونه ای که داشته باشیم :

$$F(s)=L(f(x))$$

اگر پاسخ سؤال مثبت باشد می نویسیم:

$$f(x)=L^{-1}(F(s))$$

$f(x)$ را وارون یا معکوس تبدیل لاپلاس تابع $F(s)$ نامیم.

اینک برخی خواص معکوس تبدیل لاپلاس را بررسی می کنیم.

قضیه: نشان دهید :

$$L^{-1}(\alpha F(s)+G(s))=\alpha L^{-1}(F(s))+L^{-1}(G(s))$$

اثبات: قضیه های قبلی ملاحظه شود.

Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

مثال:

الف)

$$L^{-1}(\frac{5}{s})=5L^{-1}(\frac{1}{s})=5\times 1=5$$

ب)

$$L^{-1}(\frac{4}{s^3}+\frac{6}{s^2+4})=2L^{-1}(\frac{2!}{s^3})+3L^{-1}(\frac{2}{s^2+4})=2x^2 3\sin 2x$$

ج)

$$L^{-1}(\frac{2}{s+3})=2L^{-1}(\frac{1}{s-(-3)})=2e^{-3x}$$

د)

$$L^{-1}(\frac{1}{s^2+s}) = L^{-1}(\frac{1}{s(s+1)}) = L^{-1}(\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+1})$$

$$= L^{-1}(\frac{1}{s}) - L^{-1}(\frac{1}{s-(-1)}) = 1-e^{-x}$$

هـ)

$$L^{-1}(\frac{1}{s^4+s^2}) = L^{-1}(\frac{1}{s^2(s^2+1)}) = L^{-1}(\frac{1}{s^2}+\frac{-1}{s^2+1})$$

$$= L^{-1}(\frac{1}{s^2}) - L^{-1}(\frac{1}{s^2+1}) = x-\sin x$$

ج)

$$L^{-1}\left(\frac{12}{(s+3)^4}\right)=2L^{-1}\left(\frac{3!}{(s+3)^4}\right)=2e^{-3x}\cdot x^3$$

د)

$$L^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2+2s+5}\right)=L^{-1}\left(\frac{s+1+2}{(s-1)^2+2^2}\right)$$

$$=L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right)$$

$$=e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\sin 2x$$

Mathematics by Dr. Moslehi: Teaching & Research

پایان