جلسه ۱۱

معادلات دیفرانسیل

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه یازدهم

دستگاه معادلات دیفرانسیل

دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این فصل با توجه به کاربردهای دستگاه معادلات دیفرانسیل در فیزیک و مکانیک و دیگر کاربردهای آن به بررسی و مطالعه این دستگاه ها می پردازیم.

دستگاه معادلات دیفرانسیل :

فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ توابعی بر حسب متغیر t باشند.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x' = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} \qquad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad D = \frac{d}{dt}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} P_{11}(D) & \dots & P_{1n}(D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(D) & \cdots & P_{nn}(D) \end{pmatrix}$$

$p_{ij}(D)$ ها عملگردهای چند جمله ای می باشد

$a_{ij}(t)$ ها توابعی برحسب متغیرمستقل t هستند

دستگاه معادلات دیفرانسیل در فرم های مختلف :

$[S1]$ فرم کلی دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

$$A=\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2,\dots,x_n,t)\\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,x_2,\dots,x_n,t)\\ \vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(x_1,x_2,\dots,x_n,t)\end{cases}$$

$[S2]$ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول ناهمگن:

$$x'=A(t).x+f(t)$$

$[S3]$ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول همگن:

$$x'=A(t).x$$

$[S4]$ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول همگن با ضرایب ثابت:

$$x'=Ax$$

$[S5]$ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول ناهمگن با ضرایب ثابت:

$$x'=Ax+f(t)$$

$[S6]$ دستگاه n معادله دیفرانسیل خطی:

$$px=f(t)$$

مثال (دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1^2 + x_2^2 + \sin t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 x_2 + t x_1 \end{cases}$$

مثال (دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2t x_1 - x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = t x_1 + t^3 x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow x' = A(t).x$$

مثال (دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + t x_2 + \sin t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = t^2 x_1 + (1+\sin t) x_2 + t^3 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & 1+\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ t^3+1 \end{pmatrix} \rightarrow x' = A(t).x + f(t)$$

مثال (دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 5x_2 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 9x_2 + e^t \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix} \rightarrow x' = Ax + f(t)$$

مثال (دستگاه n معادله دیفرانسیل خطی)

$$\begin{cases} x_1' + x_1 + x_2'' - 4x_2 = e^t \\ x_1' + 4x_1 + x_2' - 6x_2 = t + 3 \end{cases} \to \begin{cases} (D+1)x_1 + (D^2-4)x_2 = e^{-t} \\ (D+4)x_1 + (D-6)x_2 = t+3 \end{cases}$$

$$\to \begin{pmatrix} D+1 & D^2-4 \\ D+4 & D-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ t+3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p_{11}(D) & p_{12}(D) \\ p_{21}(D) & p_{22}(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ t+3 \end{pmatrix} \to Px = f(t)$$

حل دستگاه :

در این فصل به بحث در زمینه دستگاه های معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابتی از قبیل نمونه های زیر خواهیم پرداخت.

$$A=\begin{cases}2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-4x-y=e^{t}\\ \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0\end{cases}\rightarrow A'=\begin{cases}2(D-2)x+(D-1)y=e^{t}\\ (D+3)x+y=0\end{cases}$$

$$B=\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+y=1\\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+2x+z=1\\ \dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}+y+2z=0\end{cases}\rightarrow B'=\begin{cases}Dx+(D+1)y=1\\ (D+2)x-(D-1)z=1\\ (D+1)y+(D+2)z=0\end{cases}$$

که درآنها تعداد معادلات، با تعداد متغیرهای وابسته برابراست.

روش اصلی حل دستگاه معادلاتی مرکب از n معادله دیفرانسیل از n متغیر وابسته، بدین ترتیب است که با مشتق گیری از معادلات داده شده، مجموعه ای از معادلات را بدست می آوریم که در آن ها کلیه متغیر های وابسته بجز یکی، مثلا متغیر x قابل حذف می باشد. سپس معادله حاصل از چنین حذفی را برای این متغیر x حل می نماییم . سایر متغیر های وابسته به طریق مشابه بدست می آید.

مثال : دستگاه معادلات A' را در نظر بگیرید.

$$2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-4x-y=e^t \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}+3x+y=0 \qquad (2)$$

روش حل 1. نخست، توجه کنید که جواب عمومی $x=x(t)\,,\,y=y(t)$ ، این دستگاه همچنین در معادله زیر که با مشتق گیری از معادله (2) بدست آمده صدق می کند.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0 \qquad (3)$$

بعلاوه باضرب معادله (1) در عدد 1- و (2) در 1- و (3) در 1 و جمع آنها داریم :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=-e^t \qquad (4)$$

که در این معادله نیز با جواب $x=x(t)\ ,\ y=y(t)$ اقناع می گردد. این معادله دیفرانسیل آخر را که مستقل از متغیر y ومشتقات آن می باشد می توان به سادگی حل نمود لذا :

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{D^2+1}e^t=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}e^t$$

برای یافتن y به طریق مشابه از معادله (1) مشتق گرفته داریم :

$$2\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=e^t$$

وسپس بین این معادله ومعادلات (1) و(2) و(3) ، متغیر x و مشتقات آن را حذف می نماییم . با این وجود در اینجا ساده تر است که به روش زیر عمل کنیم. از معادله (2) داریم :

$$y=-\frac{dx}{dt}-3x=-(-c_1\sin t+c_2\cos t-\frac{1}{2})-3(c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}e^t)=(c_1-3c_2)\sin t-(3c_1+c_2)\cos t+2e^t$$

بنابراین جواب عمومی به صورت زیر است :

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}e^t \quad , \quad y=(c_1-3c_2)\sin t-(3c_1+c_2)\cos t+2e^t$$

هنگامی که معادلات با نماد D نوشته می شوند شباهت قابل توجهی بین روش ها ی به کار رفته در این جا و روش های حل دستگاه n معادله و n مجهول وجود دارد. واین شباهت ناشی از نکته ای است که در فصول گذشته متذکر گشتیم یعنی این که می توان با عملگر D همانند یک متغیر (حروف ریاضی) رفتار نمود.

روش حل2.

دستگاه A' رادرنظربگیرید:

$$1)\ 2(D-2)x+(D-1)y=e^t$$
$$2)\ (D+3)x+y=0$$

باحل این معادلات بصورت دستگاه دو معادله ای از دو مجهول x و y معادله (2) را در D-1 ضرب می کنیم که در واقع در اینجا عملگر D-1 را بر معادله (2) اثرداده ایم تا به معادله زیر برسیم:

$$(D-1)(D+3)x+(D-1)y=0$$

سپس با تفریق معادله (1) از این معادله چنین بدست می آید:

$$\left[(D-1)(D+3)-2(D-2)\right]x=-e^t \rightarrow (D^2+1)x=-e^t$$

اکنون توجه کنید که معادله فوق مطابق انتظار همان معادله (4) است.چرا که اثر دادن عملگر D-1 بر معادله (2) ، معادل مشتق گیری از (2) و جمع آن باحاصل ضرب عدد 1- درمعادله (2) میباشد که در روش حل قبلی صورت گرفت. جواب عمومی مطابق جواب حاصل از روش حل 1 است.

روش حل3.

همچنین می توانیم دستگاه را با استفاده از دترمینان حل کنیم. ازدستگاه معادلات A' بدست می آوریم:

$$\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

و

$$\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}$$

یا

$$(D^2+1)x = -e^t \quad , \quad (D^2+1)y = 4e^t$$

که معادله اول همان معادله (4) است و معادله دوم معادله ای است که از روش رد شده در روش حل 1 بدست می آمد. اکنون نشان میدهیم که چرا از این روش رد شد.

از حل دو معادله داریم:

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2}e^t \qquad (6)$$

$$y = c_3 \cos t + c_4 \sin t + 2e^t \qquad (7)$$

از روش حل 1 می دانیم که معادلات (6) و (7) جواب های اضافی ای را شامل می گردند. برای حذف این جواب ها (یعنی کاهش تعداد ثابت های اختیاری)آن ها را در معادله (2) جایگزین نموده وبه ازای کلیه مقادیر t داریم:

$$(c_2 + 3c_1 + c_3)\cos t + (3c_2 - c_1 + c_4)\sin t = 0$$

لذا: $c_3 = -(3c_1 + c_2)\ ,\ \ c_4 = c_1 - 3c_2$

با جایگذاری این مقادیر در معادلات (6) و (7) به جواب عمومی ای که قبلا پیدا شد می رسیم.

تعداد ثابت های اختیاری مستقلی که در جواب عمومی دستگاه

$$f_1(D)x + g_1(D)y = h_1(t)$$
$$f_2(D)x + g_2(D)y = h_2(t)$$

ظاهر میگردند با درجه D در دترمینان $\Delta = \begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}$ برابر است مشروط بر اینکه Δ صفر نشود اگر $\Delta \equiv 0$ باشد دستگاه معدلات وابسته می باشد و چنین دستگاه هایی در اینجا مورد بحث قرار نمی گیرند. برای دستگاه A' :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} = -(D^2+1)$$

که در اینجا درجه 2 برای D با تعداد ثابت های اختیاری ظاهر شده در جواب عمومی سازگار است این قضیه را می توان به ساده گی برای وضعیت مربوط به n معادله n متغیر وابسته بسط داد.

مثال :

1. دستگاه رو به رو را حل کنید:

$$(D-1)x+Dy=2t+1 \qquad (1)$$
$$(2D+1)x+2Dy=t \qquad (2)$$

با تفریق دو برابر معادله (1) از (2) داریم: $3x=-3t-2$ همچنین با جایگذاری $x=-t-2/3$ در معادله 1 بدست می آوریم :

$$Dy=2t+1-(D-1)x=t+\frac{4}{3}\ ,\ y=\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t+c_1$$

جواب کامل چنین است:

$$x = -t - \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + c_1$$

توجه کنید که $\begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+1 & 2D \end{vmatrix}$ نسبت به D از درجه 1 بوده و تنها یک ثابت اختیاری موجود می باشد.

مثال : معادله روبرو را در D^2+1 ضرب کنید. $\frac{dx}{dt}+6=t^4+\cos t$

حل: معادله را بر حسب عملگر D می نویسیم. داریم : $(D+6)x=t^4+\cos t$

حال طرفین را در D^2+1 ضرب می کنیم

$$(D^2+1)(D+6)x=(D^2+1)(t^4+\cos t)$$

$$D^3+6D^2+D+6=D^2(t^4+\cos t)+(t^4+\cos t)$$

توجه داشته باشید که $D^2(t^4)=12t^2$ (یعنی دو بار از t^4 نسبت به t مشتق بگیریم) و بطور مشابه $D^2(\cos t)=-\cos t$.

لذا نهایتا خواهیم داشت :

$$D^3+6D^2+D+6=(12t^2-\cos t)+(t^4+\cos t)=t^4+12t^2$$

چند نمونه از دستگاه دو معادلات دیفرانسیل:

نمونه اول: یکی از معادلات دستگاه مستقلاً قابل حل می باشد. با یک مثال توضیح می دهیم.

مثال :دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xt - x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2yt + x \end{cases}$$

چنانکه ملاحظه می شود معادله اول معادله جداشدنی است پس

$$\frac{dx}{dt} = x(2t-1) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int (2t-1)dt$$

$$\Rightarrow \ln x = t^2 - t + c \Rightarrow x = e^{t^2-t+c} = e^{t^2-t} \cdot e^c$$

که با انتخاب e^c برابر با c_1 داریم:

$$x = c_1 e^{t^2-t}$$

که با جایگذاری در معادله دوم دستگاه نتیجه می شود:

$$\frac{dy}{dt} = 2yt + c_1 e^{t^2-t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} - 2ty = c_1 e^{t^2-t}$$

و این معادله نیز معادله مرتبه اول خطی است پس:

$$y = e^{-\int -2t\,dt}\left[\int e^{\int -2t\,dt} \cdot c_1 e^{t^2-t}\,dt + c_2\right]$$

$$y = e^{t^2}\left[c_1 \int e^{-t^2} \cdot e^{t^2-t}\,dt + c_2\right]$$

$$y = e^{t^2}\left[c_1 \int e^{-t}\,dt + c_2\right] \Rightarrow \quad y = e^{t^2}\left[-c_1 e^{-t} + c_2\right]$$

پس

$$\begin{cases} x = c_1 e^{t^2-t} \\ y = -c_1 e^{t^2-t} + c_2 e^{t^2} \end{cases}$$

جواب دستگاه می باشد.

روش بالا را می توان برای دستگاه سه معادله نیز بکار برد.
مثلا دستگاه سه معادله زیر را می توان حل کرد.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2t \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 4y + t \end{cases}$$

نمونه دوم: دستگاه دو معادله مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + g(t) \end{cases}$$

با مشتق گیری از معادلات دستگاه و استفاده از معادله دوم دستگاه آنرا به معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت تبدیل می کنیم که با حل آن قبلاً آشنا شده ایم .

با یک مثال توضیح می دهیم.

مثال : دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y + x \end{cases}$$

با مشتق گیری از معادله اول داریم: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 3\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt}$

و با جایگذاری $\dfrac{dy}{dt}$ از معادله دومی نتیجه می شود:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 3y + x$$

با جایگذاری y از معادله اول داریم:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=3\frac{dx}{dt}+3(\frac{dx}{dt}-3x)+x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+8x=0$$

$$x''-6x'+8x=0$$

که دارای معادله کمکی $D^2-6D+8=0$ است که $D=4$ و
$D=2$ ریشه های متمایز هستند. پس: $x=c_1e^{2t}+c_2e^{4t}$
حال با جایگذاری در معادله اول داریم:

$$y=\frac{dx}{dt}-3x=2c_1e^{2t}+4c_2e^{4t}-3c_1e^{2t}-3c_2e^{4t}$$

$$y=-c_1e^{2t}+c_2e^{4t}$$

بنابراین

$$\begin{cases} x=c_1e^{2t}+c_2e^{4t} \\ y=-c_1e^{2t}+c_2e^{4t} \end{cases}$$

جواب دستگاه است.

نمونه سوم: استفاده از روش عملگر یا اپراتور می باشد.

در این روش فرض می کنیم که $\frac{d}{dt} = D$ ، آنگاه با جایگذاری عملگر، دستگاه را به یکی از روشهای حل دستگاه، مثلا روش حذفی گوس حل می کنیم. با یک مثال این روش را توضیح می دهیم .

مثال : دستگاه زیر را به روش D حل می کنیم:

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}-x+\dfrac{dy}{dt}+4y=1 \\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=t-1 \end{cases}$$

با استفاده از نماد $\dfrac{d}{dt}=D$ داریم:

$$\begin{cases} 2Dx-x+Dy+4y=1 \\ Dx-Dy=t-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(2D-1)x+(D+4)y=1\\ Dx-Dy=t-1\end{cases}$$

با ضرب معادله اول در D و معادله دوم در $D+4$ و جمع طرفین دستگاه داریم:

$$D(2D-1)x+(D+4)Dx=D(1)+(D+4)(t-1)$$

$$(2D^2-D+D^2+4D)x=0+D(t)+4t-D(1)-4$$

$$(3D^2+3D)x=4t-3$$

این معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت غیرهمگن می باشد پس:

$$3D^2 + 3D = 0 \quad \Rightarrow \quad 3D(D+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \ , \ D = -1$$

بنابراین $x_c = c_1 + c_2 e^{-t}$ و برای پیدا کردن x_p جواب خاص غیرهمگن آنرا به روش ضرایب ثابت حل می کنیم.

چون صفر ریشه معادله کمکی است پس:

$$x_p = t(A_0 t + A_1)$$

$$x_p = A_0 t^2 + A_1 t \quad \Rightarrow \quad x_p' = 2A_0 t + A_1 \quad \Rightarrow \quad x_p'' = 2A_0$$

با جایگذاری در معادله نتیجه می شود:

$$3x_p'' + 3x_p' = 4t - 3$$

$$6A_\circ + 6A_\circ t + 3A_1 = 4t - 3 \quad \Rightarrow \quad A_\circ = \frac{2}{3} \quad , \quad A_1 = -\frac{7}{3}$$

پس $x_p = \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$ ، بنابراین $x = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$

بنابراین با جایگذاری معادله داریم:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - t + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -c_2 e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{7}{3} - t + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3}$$

$$\int dy = \int (-c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3})dt$$

$$y = c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3$$

پس $\begin{cases} x = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t \\ y = c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3 \end{cases}$ جواب دستگاه می باشد.

تذکر: روشهای بالا را برای حل دستگاه دو معادلات خطی استفاده کردیم می توان آنرا برای حل دستگاه سه معادلات خطی نیز استفاده کرد و همچنین می توان آن را تعمیم داد و برای دستگاههایی با معادلات دیفرانسیل خطی بیشتر نیز استفاده کرد.

تذکر: همانطوری که در دستگاه معمولی ممکن است دستگاه دارای جواب منحصر بفرد و یا بی نهایت جواب و یا جواب نداشته باشند در دستگاه معادلات دیفرانسیل نیز چنین می باشد. مثلاً دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = t \\ 4Dx_1 - 4D\,x_2 = 4t \end{cases}$$

دارای بی نهایت جواب می باشد.

مثلاً $\begin{cases} x_1 = \dfrac{t^2}{2} + c \\ x_2 = 5c \end{cases}$ و $\begin{cases} x_1 = \dfrac{t^2}{2} + c_1 \\ x_2 = \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{2} + c_2 \end{cases}$ جوابهایی

از دستگاه است.

در هر کدام از جوابها $x_1 = x_1(t)$ را به دلخواه انتخاب کرده و دستگاه را بر حسب $x_2 = x_2(t)$ حل می کنیم.

ولی دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = t \\ Dx_1 - Dx_2 = t^2 \end{cases}$$

دارای جواب نیست.

تذکر: در دستگاه معادلا ت دیفرانسیل بصورت کلی زیر:

$$\begin{cases} f_1(D)x + f_2(D)y = g(t) \\ f_3(D)x + f_4(D)y = h(t) \end{cases}$$

دترمینال ضرایب یعنی:

$$W(D) = \begin{vmatrix} f_1(D) & f_2(D) \\ f_3(D) & f_4(D) \end{vmatrix}$$

را دترمینان دستگاه معادلات دیفرانسیل نامیم.

پایان