بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۱۰

معادلات دیفرانسیل

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه دهم

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری ها

مثال : بسط تیلر جواب های معادله

$$y''+(x-1)^2y'-4(x-1)y=0$$

را درنقطه معمولی $x=1$ پیدا کنید.

حل: برای سادگی از تغییر متغیر $t=x-1$ استفاده می کنیم

دراین صورت متناظر $x=1$ با $t=0$ می باشد وداریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}$$

بنابراین با جایگذاری ، معادله دیفرانسیل تبدیل به معادله

$$\frac{d^2y}{dt^2}+t^2\frac{dy}{dt}-4ty=0$$

می شود چون همه ضرایب چند جمله ای هستند

پس بازه همگرایی سریهای جواب معادله برابر
با $-\infty < t < +\infty$ است، بازه همگرایی سریهای جواب معادله
اصلی نیز برابر با $-\infty < x < +\infty$ است . سری توانی جواب
را بصورت سری مک لورن

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

درنظر می گیریم . پس:

$$\frac{dy}{dt} = a_1 + 2a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2a_2 + \ldots + n(n-1) a_n t^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

با قرار دادن سریهای بالا درمعادله دیفرانسیل ثانویه داریم:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+t^2\frac{dy}{dt}-4ty=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2} + t^2\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, t^{n-1} - 4t\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\, t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n\, t^{n+1} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{(n+2)=2}^{\infty} (n+2)((n+2)-1)a_{n+2}\, t^{(n+2)-2} + \sum_{(n-1)=0}^{\infty} (n-1)\, a_{n-1} t^{(n-1)+1}\\ &- \sum_{(n-1)=1}^{\infty} 4a_{n-1}\, t^{(n-1)+1} = 0\end{aligned}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)((n+1)a_{n+2}\, t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\, a_{n-1}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}\, t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)((n+1)a_{n+2}\,t^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,a_{n-1}t^n-\sum_{n=1}^{\infty}4a_{n-1}\,t^n=0$$

$$2a_2+6a_3t+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)((n+1)a_{n+2}\,t^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,a_{n-1}t^n-4a_0t-\sum_{n=1}^{\infty}4a_{n-1}\,t^n=0$$

$$a_2=0$$

$$6a_3-4a_0=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)((n+1)a_{n+2}+(n-1)\,a_{n-1}-4a_{n-1}]t^n=0$$

$$
\begin{cases}
2a_2 = 0 \\
3\times 2a_3 - 4a_0 = 0 \\
4\times 3a_4 + a_1 - 4a_1 = 0 \\
5\times 4a_5 + 2a_2 - 4a_2 = 0 \\
6\times 5a_6 + 3a_3 - 4a_3 = 0 \\
7\times 6a_7 + 4a_4 - 4a_4 = 0 \\
\vdots \\
n(n-1)a_n + (n-3)a_{n-3} - 4a_{n-3} = 0 \\
\vdots
\end{cases}
$$

درنتیجه:
$$a_3 = \frac{4a_0}{3\times 2} \quad , \quad a_4 = \frac{3a_1}{4\times 3} \quad , \quad a_2 = 0$$

$$a_6 = \frac{4a_0}{6\times 5\times 3\times 2} \quad , \quad a_7 = 0 \quad , \quad a_5 = 0$$

$$a_9 = \frac{2\times 4a_0}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2} \quad , \quad a_{10} = 0 \quad , \quad a_8 = 0$$

$$a_{12} = \frac{5\times 4\times 2a_0}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2} \quad , \quad a_{13} = 0 \quad , \quad a_{11} = 0$$

چنانکه ملاحظه می شود همه ستون سوم وستون دوم به غیر اولین جمله صفرهستند. تنها ستون اول ناصفر می‌باشد و برحسب a_0 است بنابراین:

$$a_3=\frac{-(3n-3-4)}{3n(3n-1)}a_{3n-3}=\frac{-(3n-7)}{3n(3n-1)}a_{3n-3}$$

$$a_{3n}=\frac{(3n-7)(3n-10)\ldots\times 8\times 5\times 2\times(-1)^n\alpha 4}{3n(3n-3)\ldots(3)\times(3n-1)(3n-4)\ldots\times 2}a_0$$

$$a_{3n}=\frac{2\times 5\times 8\times\ldots\times(3n-10)(3n-7)\times(-1)^n\times 4}{3^n(n(n-1)(n-2)\ldots.\times(2\times 1)2\times 5\times\ldots\times(3n-4)\times(3n-1)}$$

$$a_{3n}=\frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!\times(3n-4)(3n-1)}$$

$$y=a_0+a_1t+0t^2+\frac{4}{3\times 2}a_0t^3+\frac{3}{4\times 3}a_1t^4+0t^5+\frac{4}{6\times 5\times 3\times 2}a_0t^6$$

$$+0t^7+0t^8+\frac{2\times 4}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}a_0t^9+0t^{10}+0t^{11}+$$

$$\frac{2\times 5\times 4}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}a_0t^{11}+\dots$$

$$y=a_1(t+\frac{1}{4}t^4)+a_0(1+\frac{2}{3}t^3+\frac{4}{6\times 5\times 3\times 2}t^6+$$

$$\frac{2\times 4}{9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}t^9+\frac{2\times 5\times 4}{12\times 11\times 9\times 8\times 6\times 5\times 3\times 2}t^{12}+\dots$$

$$+\frac{(-1)^n.4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}t^{3n}+\dots$$

و یا

$$y=a_1\left(t+\frac{1}{4}t^4\right)+a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}t^{3n}\right)$$

با قرار دادن $t=x-1$ داریم :

$$y(x)=a_1\left((x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^4\right)+a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\times 4}{3^n.n!(3n-4)(3n-1)}(x-1)^{3n}\right)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده به ازای هر x می باشد.

تذکر: ممکن است رابطه بازگشتی بر حسب جمله عمومی امکان پذیر نباشد یا بسادگی نتوان پیدا کرد در چنین حالتی جمله عمومی را معمولا"پیدا نمی کنیم.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$$

که در آن p عدد ثابتی است به معادله دیفرانسیل لژاندر موسوم است.ملاحظه می شود که نقطه $x_0=0$ یک نقطه معمولی معادله است بنابراین دارای جوابی بصورت:

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1}$$

است که حداقل برای $|x|<1$ همگراست .

که با جایگذاری در معادله داریم:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

با تغییر اندیس داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x_n - \sum_{n=0}^{\infty} 2xa_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n\right]x^n = 0$$

وررابطه بازگشتی:

$$a_{n+2}=\frac{n(n-1)+2n-p(p+1)}{(n+2)(n-1)}a_n$$

$$=\frac{n^2-n+2n-p^2-p}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$=\frac{n^2-p^2+n-p}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$=-\frac{(p-n)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \qquad , \quad n\geq 0$$

نتیجه می شود که:

که با جایگذاری در معادله داریم:

$$a_2=-\frac{p(p+1)}{2!}a_0$$

$$a_3=-\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1$$

$$a_4=-\frac{(p-2)(p+3)}{3\times 4}a_2=\frac{p(p-1)(p+1)(p+3)}{4!}a_0$$

$$a_5=-\frac{(p-3)(p+4)}{4\times 5}a_3=\frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$$

$$a_6=-\frac{(p-4)(p+5)}{5\times 6}a_4=-\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0$$

$$a_7=-\frac{(p-5)(p+6)}{6\times 7}a_5=-\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}a_1$$

با قرار دادن این ضرایب در سری داریم:

$$y = a_0 + a_1 x + \left(-\frac{p(p+1)}{2!}a_0\right)x^2 + \left(-\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1\right)x^3 + \left(\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0\right)x^4 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6 + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left(x - \frac{(p-1)(p+2)}{2!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}x^7 + \cdots\right)$$

که برای $|x|<1$ همگراست واگر p عدد صحیح نباشد شعاع همگرایی هر دو سری داخل پرانتز برابر با یک است. توابع تعریف شده در جواب سری مشهور به توابع لژاندر می باشد که توابع متعالی هستند.در حالت خاص p جواب سری ها ممکن است متناهی باشد.

نقاط منفردمنظم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

فرض کنیم که نقطه x_0 یک نقطه منفرد معادله دیفرانسیل خطی همگن

$$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

باشد درصورتی که اگر معادله را بصورت

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)p(x)y' + q(x)y = 0$$

بنویسیم و $q(x), p(x)$ در x_0 تحلیلی باشند، نقطه را نقطه منفرد منظم نامیم واگر $q(x), p(x)$ تحلیلی نباشند را نقطه منفرد غیر منظم می گوییم.

مثال :نوع نقاط منفرد معادله دیفرانسیل

$$(x-1)y''+\frac{1}{x}y'-2y=0$$

را پیدا کنید.

حل: با تقسیم دو طرف معادله در $x-1$ ، معادله بالا به صورت

$$y''+\frac{1}{x(x-1)}y'-\frac{2}{x-1}y=0$$

در می آید مشاهده می کنیم که نقاط منفرد عبارت است

از: $x=1, x=0$ با ضرب معادله بالا در x^2 داریم :

$$x^2y''+x\frac{1}{x-1}y'-\frac{2x^2}{x-1}y=0$$

پس $q(x)=\frac{-2x^2}{x-1}, p(x)=\frac{1}{x-1}$

که هر دو در $x = 0$ تحلیلی اند. پس $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم است. حال اگر طرفین معادله را در $(x-1)^2$ضرب کنیم داریم :

$$(x-1)^2 y'' + \frac{x-1}{x} y' - \frac{2(x-1)}{1} y = 0$$

که ، هردو $q(x) = -2(x-1), p(x) = \frac{1}{x}$ در $x = 1$ تحلیلی اند

پس $x = 1$ یک نقطه منفرد منظم است.

مثال: معادله لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$$

را به صورت زیر می نویسیم .

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{p(p+1)}{1-x^2}y=0$$

روشن است که $x=1$ و $x=-1$ نقاط منفرد معادله اند که اگر طرفین معادله را در $(x-1)^2$ ضرب می کنیم داریم :

$$(x-1)^2y''+\frac{2x(x-1)}{(x+1)}y'-\frac{p(p+1)(x-1)}{x+1}y=0$$

آنگاه:

$p(x)=\dfrac{2x(x-1)}{(x+1)}$ و $q(x)=\dfrac{-p(p+1)(x-1)}{x+1}$ هردو در $x=1$ تحلیلی اند پس $x=1$ یک نقطه منفرد منظم معادله است. حال اگر طرفین معادله را در $(x+1)^2$ ضرب کنیم داریم :

$$(x+1)^2 y''+\frac{2x(x+1)}{(x-1)}y'-\frac{p(p+1)(x+1)}{x-1}y=0$$

که $p(x)=\dfrac{2x(x+1)}{(x-1)}$ و $q(x)=\dfrac{-p(p+1)(x+1)}{x-1}$ هردو در

$x=-1$ تحلیلی اند پس $x=-1$ یک نقطه منفرد منظم معادله است.

مثال: معادله دیفرانسیل خطی

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

را که به معادله بسل(Bessel) از مرتبه p معروف است در نظر می گیریم در این معادله که p عدد ثابت نا صفر می باشد با نوشتن معادله بصورت

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-p^2}{x^2}y=0$$

ملاحظه می شود که $x=0$ نقطه منفرد معادله می باشد وبا توجه به توابع $p(x)=1, q(x)=x^2-p^2$ که درنقطه $x=0$ تحلیلی اند پس $x=0$ نقطه منفرد ومنظم معادله است.

تعریف: سری بصورت

$$y=(x-x_0)^s\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+s}$$

که در آن s عددی حقیقی ویا مختلط است به سری

فروبنیوس (frobenius) مشهور است.

تذکر: اگر $x = x_0$ یک نقطه منفرد منظم معادله مرتبه دوم خطی باشد ثابت می شود که معادله دارای یک وگاهی دو جواب بصورت سری فروبنیوس با $a_0 \neq 0$ است.

در اینجا s عددی حقیقی است

این روش را با ارائه چند مثال توضیح می دهیم.

مثال: معادله دیفرانسیل

$$2x^2y''+x(2x+1)y'-y=0$$

را در نظر می گیریم واضح است که $x_0=0$ نقطه منفرد منظم معادله است جواب سری فروبنیوس

$$y=x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}$$

را در نظر می گیریم بنابراین :

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}\quad\Rightarrow\quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل نتیجه می شود:

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty})n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2}+x(2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

و یا:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}=0$$

با تغییر اندیس داریم :

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}=0$$

$$2(s)(s-1)a_0 x^{s}+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s}+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s}+sa_0 x^{s}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s}-a_0 x^{s}-\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+s}=0$$

و یا :

$$\left(2s(s-1)+s-1\right)a_0x^s+\sum\left[2(n+s)(n+s-1)+(n+s)-1\right]a_n+2(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s}=0$$

چون فرض بر آن است که $a_0\neq 0$ پس :

$$2s(s-1)+s-1=0$$

$$2s^2-2s+s-1=0$$

$$2s^2-s-1=0$$

این معادله را معادله شاخص و ریشه های آن را توان شاخص معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم نامیم . پس توان های

$$s=-\frac{1}{2},s=1$$

شاخص معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم هستند

حال به ازای هر کدام از مقادیر s ضرایب a_n ها در رابطه بازگشتی :

$$\big(2(n+s)(n+s-1)+n+s-1\big)a_n = -2(n+s-1)a_{n-1}$$

و یا :

$$a_n = \frac{-2(n+s-1)}{2(n+s)(n+s-1)+n+s-1}a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

$$= \frac{-2(n+s-1)}{(n+s-1)(2n+2s+1)}a_{n-1} = \frac{-2}{2n+2s+1}a_{n-1} \qquad , \qquad n \geq 1$$

صدق می کند .

الف) اگر $s=1$ رابطه بالا نتیجه می دهد که :

$$a_n=\frac{-2}{2n+3}a_{n-1}\ ,\quad n\geq 1$$

$$a_1=\frac{-2}{5}a_0$$

$$a_2=\frac{-2}{7}a_1=\frac{(-2)(-2)}{5\times 7}a_0$$

$$a_3=\frac{-2}{9}a_2=\frac{(-2)(-2)(-2)}{5\times 7\times 9}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{(-2)^n}{5\times 7\times 9\times\cdots\times(2n+3)}a_0$$

ب) اگر $s=-\frac{1}{2}$ آنگاه :

با $n\geq 1$

$$a_n=\frac{-2}{2n+2(-\frac{1}{2})+1}a_{n-1}=\frac{-2}{2n}a_{n-1}=\frac{-1}{n}a_{n-1}$$

پس :

$$a_1=\frac{-1}{1}a_0=-a_0$$

$$a_2=-\frac{1}{2}a_1=\frac{(-1)(-1)}{2}a_0$$

$$a_3=-\frac{1}{3}a_2=\frac{(-1)(-1)(-1)}{2\times 3}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n=-\frac{1}{n}a_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}a_0$$

در نتیجه دو جواب سری فروبینوس عبارت است از :

$$y_1 = x\left(1+\frac{-2}{5}x+\frac{(-2)^2}{5\times 7}x^2+\frac{(-2)^3}{5\times 7\times 9}x^3+\cdots+\frac{(-2)^n}{5\times 7\times\cdots\times(2n+3)}x^n+\cdots\right)$$

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x+\frac{(-1)^2}{2!}x^2+\frac{(-1)^3}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\cdots\right)$$

و دو تابع y_1 , y_2 بدلیل $x^{-\frac{1}{2}}$ در بازه $(0,+\infty)$ مستقل خطی وهمگرا هستند پس :

$$y = c_1 x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5\times 7\times\cdots\times(2n+3)}x^n\right)+c_2 x^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است .

حالتی که معادله شاخص دارای ریشه های برابر است.

تذکر: درادامه بحث خود معادلاتی را مورد بررسی قرار می دهیم که دارای یک نقطه منفرد در $x=0$ است.در این حالت معادله به صورت

$$x^2y''+xp(x)y'+q(x)y=0$$

در می آید،که در آن $q(x), p(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند.همچنانکه قبلا مشاهده کردیم،این محدودیت از کلیت بحث نمی کاهد، زیرابا تغییر متغیر $t=x-x_0$ نقطه منفردمنظم x_0 را به صفر تبدیل می کند.

- بررسی حالت کلی

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

را در نظرمی گیریم . فرض $x = 0$ نقطه منفردمنظم باشد در این صورت در $q(x), p(x)$ تحلیلی هستند،در نتیجه به ازای $|x| < R$ ، داریم:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

و y تابعی بصورت:

$$y(x)=x^{s}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\partial\infty}a_{n}x^{n+s}$$

باشد، آنگاه:

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(n+s)x^{n+s-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}$$

$$xp(x)y'(x)=x^{s}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_{n}x^{n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}p_{n}x^{n}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_{k}p_{n-k}\Big)x^{n+s}$$

$$q(x)y(x)=x^{s}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}q_{n}x^{n}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_{k}q_{n-k}\Big)x^{n+s}$$

با قرار دادن مقادیر بالا در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(k+s)a_k p_{n-k})x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_k q_{n-k})x^{n+s}=0$$

در نتیجه

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+s)(n+s-1)a_n+\sum_{k=0}^{n}[(k+s)p_{n-k}+q_{n-k}]a_k\}x^{n+s}=0$$

که با فرض ضریب کوچکترین توان x ,$(n=0)$ داریم:

$$s(s-1)a_0+(sp_0+q_0)a_0=0$$

چون $a_0\neq 0$ پس $f(s)=s(s-1)sp_0+q_0$

ویا $f(s)=s^2+(p_0-1)s+q_0$

معادله شاخص می باشد و ریشه های آن را توان های شاخص معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم نامیده می شود.

ملاحظه می شودکه سه حالت زیر می تواند در مورد معادله شاخص رخ دهد:

الف) اگر $s_1 - s_2$ عدد غیر صحیح وغیرصفر باشد.

ب) اگر $s_1 - s_2$ عدد صحیح ومثبت باشد.

ج) اگر $s_1 - s_2$ صفر باشد.

در حالت الف) معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل به صورت

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{و} \quad y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

دارد. قبلا مثالهایی در این مورد ملاحظه شد.

در حالت ب) و ج) فقط یک جواب به صورت

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

دارد. برای پیدا کردن جواب مستقل دیگر نشان داده می شود که جواب به صورت

$$y_2 = Ay_1(x)\log x + x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

است که می توان با مشتق گیری وجایگذاری در معادله دیفرانسیل ضرایب c_n ها و A را پیدا کردکه ممکن است مقدار A برابرصفر باشد که در این صورت $y_2(x)$ به شکل یک سری فروبینوس می با شد.

تذکر: در فیزیک و ریاضیات محض،اغلب بررسی جواب معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

وقتی متغیر مستقل x بینهایت باشد،مورد نظر است. با به

کار بردن تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ مقادیر بزرگ x با

مقادیرکوچک t متناظر خواهند بود.

با جایگذاری t به جای x جوابهایی از معادله دیفرانسیل جدید را بدست
می آوریم که اگر معادله جدید دارای یک نقطه معمولی
در $t=0$ باشد، گوییم معادله دیفرانسیل دارای یک نقطه
معمولی دربینهایت است. به همین نحو، اگر معادله جدید دارای
یک نقطه منفرد منظم در $t=0$ باشد، گوییم معادله دیفرانسیل
دارای یک نقطه منفرد منظم دربینهایت است.

پایان