بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۶

معادلات دیفرانسیل

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه ششم

معادلات دیفرانسیل خطی

در فصل اول، هدف ما حل معادلات مرتبه اول به فرم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

یا بطور معادل به فرم:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

بود

آنچه در فصل اول مطالعه کرده ایم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

- ساده ترین نوع
- معادلات جدا پذیر
- معادلات همگن
- معادلات کامل
  - عامل انتگرالساز
- معادلات خطی مرتبه اول
  - معادله برنولی
  - معادله ریکاتی
- معادلات مرتبه دو و بالاتر که می توان آنها را به دو یا چند معادله مرتبه اول تبدیل کرد(کاهش مرتبه)

در این فصل معادلات خطی را مطرح می کنیم

فرم کلی معادله خطی مرتبه n ام:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

که در آن توابع $F(x)$ ، $a_0(x)$ ، $a_1(x)$ ، .... و $a_n(x)$ بر بازه I پیوسته بوده و $a_n(x)$ بر بازه I متحد صفر نباشد.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x)$$

اگر $F(x)$ بر بازه I متحد صفر باشد، معادله فوق را **همگن** گوییم و در غیر اینصورت معادله فوق را **ناهمگن** گوییم.

تذکر:

مفهوم همگن در این فصل ارتباط با معنایی با مفهوم همگن در فصل قبلی ندارد.

معادله خطی مرتبه n ام:

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$$

مثال:

معادله خطی مرتبه سوم ناهمگن:

$$y'''+x^2y''+5xy'+2y=sin(x)$$

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن:

$$y''+2xy'+4y=e^x$$

معادله خطی مرتبه چهارم همگن:

$$y^{(4)}+2xy'+4x^2y=0$$

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن:

$$(x^2-2x)y''+4(x-1)y'+2y=e^{2x}+ln(x)$$

نکته:

تئوری حل معادلات دیفرانسیل خطی را برای

معادلات خطی مرتبه دوم

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x) \qquad (۱)$$

که $F(x)$ ، $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

مطرح می کنیم. این تئوری قابل تعمیم به معادلات خطی مراتب بالاتر می باشد

$\boxed{۱}$ $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن:

که $F(x)$ ، $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

$\boxed{۲}$ $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$

معادله خطی مرتبه دوم همگن:

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

حالت خاصی از معادله $\boxed{۲}$

$\boxed{۳}$ $y''+a_1y'+a_0y=0$

معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

که a_0 و a_1 اعدادی ثابت هستند.

حالت خاصی از معادله $\boxed{۱}$

$\boxed{۴}$ $y''+a_1y'+a_0y=F(x)$

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت:

که $F(x)$ تابعی بر حسب x و a_0 و a_1 اعدادی ثابت هستند.

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن: $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$ ۱

که $F(x)$ ، $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

قضیه ۱

فرض کنید توابع $F(x)$ ، $a_0(x)$ و $a_1(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند. هرگاه x_0 نقطه ای متعلق به $[a,b]$ باشد و هرگاه y_0 و y_1 دو عدد دلخواه باشند، آنگاه معادله ۱ دارای یک و تنها یک جواب $y(x)$ در آن فاصله است به طوری که:

$$y(x_0)=y_0 \text{ و } y(x_1)=y_1$$

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن: ۱

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$$

که $F(x)$ ، $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

معادله خطی مرتبه دوم همگن: ۲

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

قضیه ۲

y: جواب عمومی معادله ۱ = y_g: جواب عمومی معادله ۲ + y_p: یک جواب اختصاصی از معادله ۱

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن: [۱]

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$$

که $F(x)$، $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

معادله خطی مرتبه دوم همگن: [۲]

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

اثبات

فرض کنید y_g جواب عمومی معادله $\boxed{2}$ باشد و نیز فرض کنید y_p جواب معینی از معادله $\boxed{1}$ باشد. حال چنانچه y جوابی از معادله $\boxed{1}$ باشد، یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که $y-y_p$ جواب معادله $\boxed{2}$ است:

$$(y-y_p)''+a_1(x)(y-y_p)'+a_0(x)(y-y_p)$$

$$=[y''+a_1(x)y'+a_0(x)y]+[y_p''+a_1(x)y_p'+a_0(x)y_p]$$

$$=F(x)-F(x)=0$$

معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن:

$\boxed{1}$ $$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x)$$

که $F(x)$، $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

معادله خطی مرتبه دوم همگن:

$\boxed{2}$ $$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

اثبات

از آنجایی که y_g جواب عمومی معادله $\boxed{2}$ می‌باشد لذا با انتخاب مناسب c_1 و c_2 می‌توان نوشت:

$$y-y_p=y_g(x,c_1,c_2)$$

لذا نشان دادیم که اگر y جوابی از معادله $\boxed{1}$ باشد، با انتخاب مناسب c_1 و c_2 می‌توان نوشت:

$$y=y_g(x,c_1,c_2)+y_p$$

معادله خطی مرتبه دوم همگن: ۲

$$y''+ a_1(x)y'+a_0(x)y = 0$$

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

قضیه ۳

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله ۲ باشند، آنگاه

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

نیز به ازای هر دو عدد ثابت اختیاری C_1 و C_2 ، جواب معادله ۲ خواهد بود

به عبارت دیگر:

هر ترکیب خطی از دو جواب معادله همگن ۲ ، خود نیز یک جواب آن معادله خواهد بود

معادله خطی مرتبه دوم همگن:

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad \boxed{۲}$$

که $a_1(x)$ و $a_0(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

اثبات

ثابت: $(c_1y_1+c_2y_2)''+a_1(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+a_0(x)(c_1y_1+c_2y_2)=0$

$$\Rightarrow c_1(y_1''+a_1(x)y_1'+a_0(x)y_1)+c_2(y_2''+a_1(x)y_2'+a_0(x)y_2)=0$$

$$\Rightarrow c_1\cdot(0)+c_2(0)=0$$

لذا $y=c_1y_1+c_2y$ جواب معادله $\boxed{2}$ می باشد.

معادله خطی مرتبه دوم همگن:

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad (۲)$$

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

تعریف رونسکین (رونسکیی)

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله ۲ باشند، آنگاه رونسکین آنها که با نماد $W(y_1,y_2)$ نمایش داده می شود، عبارتست از:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=y_1y'_2-y_2y'_1$$

معادله خطی مرتبه دوم همگن:

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad (۲)$$

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

لم ۱

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله ۲ در بازه $[a,b]$ باشند، آنگاه رونسکین آنها، یعنی $W(y_1,y_2)$ ، در بازه $[a,b]$ یا همواره صفر است و یا هیچگاه صفر نمی شود.

اثبات

$$W' = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_2' y_1' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

از آنجایی که y_1 و y_2 هر دو جواب معادله $\boxed{2}$ هستند لذا:

$$y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1 = 0$$

$$y_2'' + a_1(x) y_2' + a_0(x) y_2 = 0$$

حال معادله اول را در y_2 و دومی را در y_1 ضرب می‌کنیم. سپس آنها را از هم کم می‌کنیم. داریم:

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + a_1(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

یا

$$\frac{dW}{dx} + a_1(x) \cdot W = 0$$

$$\Rightarrow W = c e^{-\int a_1(x) dx}$$

با توجه به اینکه قسمت نمایی هرگز صفر نمی‌شود، اثبات کامل می‌شود.

۲ $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ **معادله خطی مرتبه دوم همگن:**

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

تعریف استقلال خطی و وابستگی خطی توابع

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع در بازه $[a,b]$ باشند، آنگاه این دو تابع را مستقل خطی گوییم هرگاه تساوی

$$C_1f(x)+C_2g(x)=0$$

ایجاب کند که

$$C_1=C_2=0$$

در غیر اینصورت آنها را وابسته خطی می نامیم.

در واقع : اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع تعریف شده در بازه $[a,b]$ باشند و یکی از آنها مضرب ثابتی از دیگری باشد، آنگاه این دو تابع را وابسته خطی خواهیم گفت

معادله خطی مرتبه دوم همگن:

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad (۲)$$

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

لم ۲

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب معادله **۲** در بازه $[a,b]$ باشند، آنگاه این دو جواب وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=y_1y'_2-y_2y'_1=0$$

مثال

مثال: $y_1 = \sin x$ و $y_2 = \cos x$ جواب‌های معادله $y'' + y = 0$ هستند.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x$$

$$= -1 \neq 0$$

لذا این دو جواب مستقل خطی هستند.

معادله خطی مرتبه دوم همگن: $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ **۲**

که $a_1(x)$ و $a_0(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

قضیه ۳

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی از معادله ۲ در بازه $[a,b]$ باشند ، آنگاه

$$y_g=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

جواب عمومی معادله ۲ در بازه $[a,b]$ خواهد بود

معادله خطی مرتبه دوم همگن: $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ **۲**

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

در قضیه ۳ گفتیم که اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی از معادله **۲** در بازه $[a,b]$ باشند ،

آنگاه $y_g=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ جواب عمومی معادله **۲** در بازه $[a,b]$ خواهد بود

لذا

برای یافتن جواب عمومی معادله **۲**، کافیست دو جواب مستقل خطی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ از آن را بیابیم.

در اینجا بیان می داریم که حتی با یک جواب هم می توان به جواب عمومی دست یافت.

برای این کار: فرض کنید که جواب $y_1(x)$ از معادله **۲** داده شده باشد. $y_2(x)$ را طوری می یابیم که

اولا: $y_2(x)$ جواب معادله **۲** باشد

ثانیا: $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقل خطی باشند.

قرار می دهیم $y_2 = v y_1$ که v تابعی از متغیر x می باشد. با این انتخاب، y_1 و y_2 مستقل خطی خواهند بود.

y_1 جواب معادله I می باشد $\Rightarrow y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1 = 0$

می خواهیم y_2 نیز جواب معادله I باشد: $\longrightarrow y_2'' + a_1(x) y_2' + a_0(x) y_2 = 0$

$$y_2' = v y_1' + v' y_1$$

$$y_2'' = v y_1'' + 2 v' y_1' + v'' y_1$$

با قرار دادن روابط بالا در معادله I خواهیم داشت: (پس از مرتب کردن)

$$v(y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1) + v'' y_1 + v'(2 y_1' + a_1(x) y_1) = 0$$

$$\Rightarrow v'' y_1 + v'(2y_1' + a_1(x) y_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v''}{v'} = -2\frac{y_1'}{y_1} - a_1(x)$$

با انتگرال گیری از طرفین :

$$\ln|v'| = -2\ln|y_1| - \int a_1(x)dx$$

$$\Rightarrow v' = e^{-2\ln|y_1| - \int a_1(x)dx}$$

$$\Rightarrow v' = e^{\ln(y_1)^{-2}} \cdot e^{-\int a_1(x)dx}$$

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int a_1(x)dx} \Rightarrow \boxed{v = \int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int a_1(x)dx} dx}$$

معادله خطی مرتبه دوم همگن: $y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ ۲

که $a_0(x)$ و $a_1(x)$ توابعی بر حسب x هستند.

بنابر این مبحث زیر را داریم:

استفاده از یک جواب معلوم برای یافتن جواب دیگر

فرض کنید که جواب $y_1(x)$ از معادله ۲ در بازه $[a,b]$ باشد.

قرار می دهیم: $y_2(x)=v(x)y_1(x)$

که :
$$v=\int \frac{1}{{y_1}^2}e^{-\int a_1(x)dx}dx$$

اولا: $y_2(x)$ جواب معادله ۲ می باشد

ثانیا: $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقل خطی می باشند.

لذا: $y_g=C_1y_1(x)+C_2v(x)y_1(x)$ جواب عمومی معادله ۲ در بازه $[a,b]$ خواهد بود

$$v = \int \frac{1}{{y_1}^2} e^{-\int a_1(x)dx} dx$$

مثال:

$$x^2y'' + xy' - y = 0 \quad , \quad y_1 = x$$

حل:

$$y'' + \left(\frac{1}{x}\right)y' - \left(\frac{1}{x^2}\right)y = 0$$

$$v = \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln|x|} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$y_2 = v y_1 \Longrightarrow \boxed{y_2 = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)(x)}$$ لذا

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \Longrightarrow \underbrace{y = c_1 x + c_2\left(-\frac{1}{2x}\right)}_{\text{جواب عمومی}}$$

مثال

$$y'' + y = 0 \quad , \quad y_1 = \sin x$$

حل:

$$v = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot e^{-\int 0\, dx}\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int \csc^2 x\, dx = -\cot(x)$$

لذا

$$y_2 = -\cot(x) \cdot \sin x = -\cos x$$

$$y = c\, y_1 + c_2 y_2 \Longrightarrow \boxed{y = c_1 \sin x + c_2(-\cos x)}$$

جواب عمومی

پایان