بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۴

معادلات دیفرانسیل

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه چهارم

فصل اول
معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در فصل اول، هدف ما حل معادلات مرتبه اول به فرم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

یا بطور معادل به فرم:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

می باشد

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \equiv \frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

آنچه تاکنون مطالعه کرده ایم:

- ساده ترین نوع
- معادلات جدا پذیر
- معادلات همگن
- معادلات کامل

موضوع بحث امروز

عامل انتگرالساز

موضوع بحث امروز

معادلات خطی مرتبه اول

عامل انتگرالساز

عامل انتگرال ساز

تعریف: فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad *$$

کامل نباشد (M و N توابعی دو متغیره بر حسب x و y هستند)، اگر تابعی مثل

$$\boldsymbol{P(x,y)}$$

به قسمی وجود داشته باشد که با ضرب کردن آن در طرفین معادلهٔ قبل معادله ای کامل بدست آید یعنی معادلهٔ $PMdx + PNdy = 0$ کامل باشد. در اینصورت تابع را عامل انتگرال ساز (ع.ا.) برای معادلهٔ * می گوئیم.

محاسبه عامل انتگرال ساز:

فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل

$$Mdx + Ndy = 0 \quad *$$

کامل نباشد و $P(x,y)$ یک عامل انتگرال ساز برای معادلهٔ * باشد آنگاه معادلهٔ

$$PMdx + PNdy = 0$$

کامل است پس باید در شرط کامل بودن صدق کند. بنابراین:

$$\frac{\partial(PM)}{\partial y} = \frac{\partial(PN)}{\partial x}$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial P}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}P = \frac{\partial p}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}P$$

محاسبه عامل انتگرال ساز:

بنابر این:

اگر P عامل انتگرالسازی برای معادله $Mdx + Ndy = 0$ باشد آنگاه باید در رابطه زیر صدق کند:

$$\frac{\partial P}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}P = \frac{\partial p}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}P \qquad \#$$

از رابطه فوق نمی توان فرمولی بدست آورد که P را صراحتا بر حسب M و N بدست آورد. بنابر این سراغ حالت های خاص می رویم. یعنی حالت‌هایی را بررسی می کنیم که روی P یک محدودیت اعمال شده باشد.

Mathematics by Dr. Moslehi: Teaching & Research

حالت خاص الف: (P فقط بر حسب x باشد.)

اگر P ، (ع.ا. معادلهٔ ⁕)، تابعی فقط بر حسب x باشد، در اینصورت داریم $\frac{\partial P}{\partial y}=0$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}M+\frac{\partial M}{\partial y}P=\frac{\partial p}{\partial x}N+\frac{\partial N}{\partial x}P \qquad \#$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}P=\frac{\partial P}{\partial x}N+\frac{\partial N}{\partial x}P$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)P=\frac{\partial P}{\partial x}N$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (1)$$

اگر P ، تابعی فقط بر حسب x باشد، در اینصورت رابطه # به رابطه (1) تبدیل می شود

فرمول (1) دو کاربرد مهم دارد:

۱- تشخیص اینکه چه موقع معادله $Mdx+Ndy=0$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب x است.

۲- چگونه عامل انتگرالساز مذکور را بیابیم.

حالت خاص الف: (P فقط بر حسب x باشد.)

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (1)$$

۱- چه موقع معادله $Mdx+Ndy=0$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب x است؟

جواب: هرگاه $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ فقط بر حسب x باشد. (زیرا در این حالت، طرف اول رابطه (1) فقط بر حسب x است پس باید طرف دوم هم فقط بر حسب x باشد.)

۲- چگونه عامل انتگرالساز مذکور را بیابیم.

جواب: از طرفین (1) انتگرال می گیریم.

$$\int\frac{\frac{\partial P}{\partial x}}{P}dx=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

$$\rightarrow Ln|P|=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx \rightarrow P=\pm e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}$$

حالت خاص ب: (P فقط بر حسب y باشد.)

اگر P ، (ع.ا. معادلهٔ ✻)، تابعی فقط بر حسب y باشد، در اینصورت داریم $\frac{\partial P}{\partial x}=0$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}M+\frac{\partial M}{\partial y}P=\frac{\partial P}{\partial x}N+\frac{\partial N}{\partial x}P \qquad \#$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}M+\frac{\partial M}{\partial y}P=\frac{\partial N}{\partial x}P$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)P=-\frac{\partial P}{\partial y}M$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \qquad (2)$$

اگر P ، تابعی فقط بر حسب y باشد، در اینصورت رابطه # به رابطه (2) تبدیل می شود

فرمول (2) دو کاربرد مهم دارد:

۱- تشخیص اینکه چه موقع معادله $Mdx+Ndy=0$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب y است.

۲- چگونه عامل انتگرالساز مذکور را بیابیم.

حالت خاص ب: (P فقط بر حسب y باشد.)

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \qquad (2)$$

۱- چه موقع معادله $Mdx+Ndy=0$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب y است؟

جواب: هرگاه $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ فقط بر حسب y باشد. (زیرا در این حالت، طرف اول رابطه (2) فقط بر حسب y است پس باید طرف دوم هم فقط بر حسب y باشد.)

۲- چگونه عامل انتگرالساز مذکور را بیابیم.

جواب: از طرفین (2) انتگرال می گیریم.

$$\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy$$

$$\rightarrow \quad Ln|P|=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy \quad \rightarrow \quad P=\pm e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy}$$

حالت خاص ج: (P فقط بر حسب $z=x+y$ باشد.)

اگر P ، (ع.ا. معادلۀ ٭)، تابعی فقط بر حسب $z=x+y$ باشد، در اینصورت داریم

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.1=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial z}.1=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}M+\frac{\partial M}{\partial y}P=\frac{\partial P}{\partial x}N+\frac{\partial N}{\partial x}P \qquad \#$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z}M+\frac{\partial M}{\partial y}P=\frac{\partial P}{\partial z}N+\frac{\partial N}{\partial x}P$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)P=\frac{\partial P}{\partial z}(N-M)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{P}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M} \qquad (3)$$

اگر P ، تابعی فقط بر حسب y باشد، در اینصورت رابطه # به رابطه (3) تبدیل می شود

فرمول (3) دو کاربرد مهم دارد:

۱- تشخیص اینکه چه موقع معادله $Mdx+Ndy=0$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب $z=x+y$ است.

۲- چگونه عامل انتگرالساز مذکور را بیابیم.

حالت خاص ج: (P فقط بر حسب $z = x + y$ باشد.)

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{P} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} \qquad (3)$$

۱- چه موقع معادله $Mdx + Ndy = 0$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب $z = x + y$ است؟

جواب: هرگاه $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}$ فقط بر حسب $z = x + y$ باشد. (زیرا در این حالت، طرف اول رابطه (3) فقط بر حسب $z = x + y$ است پس باید طرف دوم هم فقط بر حسب $z = x + y$ باشد.)

۲- چگونه عامل انتگرالساز مذکور را بیابیم.

جواب: از طرفین (3) انتگرال می گیریم.

$$\int \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{P} dz = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} dz$$

$$\rightarrow \quad Ln|P| = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} dz \quad \rightarrow \quad P = \pm e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N-M} dz}$$

حالت خاص د: (P فقط بر حسب $z = xy$ باشد.)

اگر P ، (ع.ا. معادلۀ ❋)، تابعی فقط بر حسب $z = xy$ باشد، در اینصورت داریم

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z}.x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}P = \frac{\partial P}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}P \qquad \#$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z}xM + \frac{\partial M}{\partial y}P = \frac{\partial P}{\partial z}yN + \frac{\partial N}{\partial x}P$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)P = \frac{\partial P}{\partial z}(yN - xM)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{P} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} \qquad (4)$$

اگر P ، تابعی فقط بر حسب y باشد، در اینصورت رابطه # به رابطه (4) تبدیل می شود

فرمول (4) دو کاربرد مهم دارد:

۱- تشخیص اینکه چه موقع معادله $Mdx + Ndy = 0$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب $z = xy$ است.

۲- چگونه عامل انتگرالساز مذکور را بیابیم.

حالت خاص د: (P فقط بر حسب $z=xy$ باشد.)

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{P}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM} \qquad (4)$$

۱- چه موقع معادله $Mdx+Ndy=0$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب $z=xy$ است؟

جواب: هرگاه $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}$ فقط بر حسب $z=xy$ باشد. (زیرا در این حالت، طرف اول رابطه (3) فقط بر حسب $z=xy$ است پس باید طرف دوم هم فقط بر حسب $z=xy$ باشد.)

۲- چگونه عامل انتگرالساز مذکور را بیابیم.

جواب: از طرفین (4) انتگرال می گیریم.

$$\int \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{P}dz=\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}dz$$

$$\rightarrow \quad Ln|P|=\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}dz \quad \rightarrow \quad P=\pm e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}dz}$$

$$Mdx + Ndy = 0 \quad *$$

اگر $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ فقط بر حسب x باشد

معادله $*$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب x است و

$$\text{عامل انتگرالساز} = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}$$

اگر $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ فقط بر حسب y باشد

معادله $*$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب y است و

$$\text{عامل انتگرالساز} = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy}$$

اگر $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}$ فقط بر حسب $z = x + y$ باشد

معادله $*$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب $z = x + y$ است و

$$\text{عامل انتگرالساز} = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}dz}$$

اگر $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}$ فقط بر حسب $z = xy$ باشد

معادله $*$ عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب $z = xy$ است و

$$\text{عامل انتگرالساز} = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}dz}$$

$$\underbrace{(4x^2y^3-2y)}_{M}\,dx+\underbrace{(3x^3y^2-x)}_{N}\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12x^2y^2-2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=9x^2y^2-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\Longrightarrow$$ معادله کامل نیست

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{3x^2y^2-1}{3x^3y^2-x}=\frac{3x^2y^2-1}{x(3x^2y^2-1)}=\frac{1}{x}$$

مقدار بدست آمده فقط برحسب x می باشد

بنابراین عامل انتگرال ساز داریم که فقط برحسب x است.

$$P=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln|x|}=|x|=\pm x$$

$$\Longrightarrow \boxed{P=x}$$

بنابراین اگر طرفین معادله را در $x = P$ ضرب کنیم آنگاه معادله مذکور به یک معادله کامل تبدیل می‌شود:

$$(4x^3y^3 - 2xy)\,dx + (3x^4y^2 - x^2)\,dy = 0$$ کامل است

لذا تابع $f(x,y)$ وجود دارد بطوریکه

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^3 - 2xy & ① \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^4y^2 - x^2 \end{cases} \Longrightarrow f(x,y) = x^4y^3 - x^2y + h(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^3 - 2xy + h'(x) \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow h'(x) = 0 \Longrightarrow h(x) = k \quad k \text{ ثابت}$$

بنابراین:

$$f(x,y) = x^4y^3 - x^2y + k$$

$$\cancel{x^4 + y^3 = ?} \qquad x^4y^3 - x^2y + k = c_1$$

$$\boxed{x^4y^3 - x^2y = c}$$ جواب عمومی

معادله زیر عامل انتگرال سازی دارد که فقط برحسب $z=xy$ است. آن را بیابید.

$$\underbrace{y}_{M}\,dx+(\underbrace{x+x^{3}y^{2}}_{N})\,dy=0$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=\frac{(1)-(1+3x^{2}y^{2})}{y(x+x^{3}y^{2})-x(y)}=\frac{-3x^{2}y^{2}}{x^{3}y^{3}}=\frac{-3}{xy}=\frac{-3}{z}$$

$$P=e^{\int -\frac{3}{z}\,dz}=e^{-3\ln|z|}=e^{\ln|z^{-3}|}=|z^{-3}|=\pm\frac{1}{z^{3}}$$

لذا $P=\frac{1}{z^{3}}=\frac{1}{x^{3}y^{3}}$

تبصره: گاهی اوقات امکان اینکه مساله عامل انتگرال سازی به فرم $P=x^m y^n$ داشته باشد را بررسی می کنیم. مثلاً در مورد مساله قبلی، اگر عامل انتگرال ساز به فرم $P=x^m y^n$ در نظر گرفته شود، آنگاه:

$$x^m y^n \left[y\,dx + (x + x^3 y^2)\,dy \right] = 0$$ کامل است

$$\Rightarrow (x^m y^{n+1})\,dx + (x^{m+1} y^n + x^{m+3} y^{n+2})\,dy = 0$$

$$\xrightarrow{\text{شرط کامل بودن}} (n+1) x^m y^n = (m+1) x^m y^n + (m+3) x^{m+2} y^{n+2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 = m+1 \\ m+3 = 0 \longrightarrow \boxed{m=-3} \xrightarrow{n+1=m+1} \boxed{n=-3} \end{cases}$$

لذا $P = x^{-3} y^{-3}$ که همان جواب قبلی می باشد.

۷− عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل $(2y^3-3xy)dx+(xy^2+x^2)dy=0$ کدام است ؟

۱. y^2x　　۲. $y^{-2}x$　　۳. x^2y　　۴. $x^{-2}y$

با توجه به گزینه‌ها، $P=x^m y^n$ را به عنوان عامل انتگرال‌ساز در نظر می‌گیریم.

با ضرب طرفین معادله در P داریم:

$$\left(2x^m y^{n+3}-3x^{m+1}y^{n+1}\right)dx+\left(x^{m+1}y^{n+2}+x^{m+2}y^n\right)dy=0$$

$$\xrightarrow{\text{شرط کامل بودن}}\ 2(n+3)x^m y^{n+2}-3(n+1)x^{m+1}y^n=(m+1)x^m y^{n+2}+(m+2)x^{m+1}y^n$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}2(n+3)=m+1\\ -3(n+1)=m+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2n-m=-5\\ -3n-m=5\end{cases}$$

$$5n=-10\longrightarrow \boxed{n=-2}\longrightarrow m=1$$

لذا

$$P=xy^{-2}$$

۳- عامل انتگرالساز معادله دیفرانسیل $ydx = (x^2 + x)dy$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{x^2}$ ۲. $\frac{1}{y^2}$ ۳. $-y^2$ ۴. $-x^2$

با توجه به گزینه‌ها: $P = x^m y^n$

$$y\,dx + (-x^2 - x)\,dy = 0$$

$$(x^m y^{n+1})\,dx + (-x^{m+2} y^n - x^{m+1} y^n)\,dy = 0$$

$\xrightarrow{\text{شرط کامل بودن}}$ $$(n+1)x^m y^n = -(m+2)x^{m+1}y^n - (m+1)x^m y^n$$

$$\longrightarrow \begin{cases} n+1 = -(m+1) \\ -(m+2) = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{m=-2} \longrightarrow \boxed{n=0}$$

لذا $P = x^{-2} \cdot y^0 = x^{-2}$

معادلات خطی مرتبه اول

معادلات خطی مرتبه اول

فرم کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول: $\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)$ *

$$\frac{dy}{dx}+\big(f(x)y-g(x)\big)=0 \Longrightarrow \underbrace{\big(f(x)y-g(x)\big)}_{M}dx+\underbrace{(1)}_{N}dy=0$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{f(x)-0}{1}=f(x)$$

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ فقط بر حسب x است

معادله * عامل انتگرالسازی دارد که فقط بر حسب x است و

$$\text{عامل انتگرالساز}=P=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}=e^{\int f(x)dx}$$

معادلات خطی مرتبه اول

با ضرب طرفین معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول $\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)$ در عامل انتگرالساز داریم:

$$P(x)\frac{dy}{dx}+P(x)f(x)y=P(x)g(x)$$

$$\xrightarrow{\frac{dP}{dx}=f(x).e^{\int f(x)dx}=f(x)P(x)} \boldsymbol{\frac{d}{dx}(y.P)=Pg}$$

$$\boxed{P=e^{\int f(x)dx}}$$

$$y.P=\int Pg dx+C$$

$$y=P^{-1}\left(\int Pg dx+C\right)$$

$$y=e^{-\int f(x)dx}\left(\int e^{\int f(x)dx}g(x)dx+C\right)$$

بطور کلی:

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)$$

$$P=e^{\int f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(y.P)=Pg}$$

مثال : $y' - 2xy = e^{x^2}$ خطی مرتبه اول

$$P = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(y\cdot P) = g\cdot P \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(y\cdot e^{-x^2}\right) = \overset{1}{\cancel{e^{x^2}\cdot e^{-x^2}}}$$

$$\Longrightarrow y e^{-x^2} = \int 1\,dx + C$$

$$\Longrightarrow y e^{-x^2} = x + C$$

$$\Longrightarrow y = x e^{x^2} + C e^{x^2}$$

مثال :

$$y' + y\cot x = 2x\csc x$$

خطی مرتبه اول

$$P = e^{\int \cot x\,dx} = e^{\ln|\sin x|} = |\sin x|$$

$$\boxed{P = \sin x \quad : \text{فاکتور تعمیم}}$$

$$\frac{d}{dx}(y\cdot\sin x) = 2x\csc x\cdot\sin x = 2x$$

$$\Rightarrow y\sin x = \int 2x\,dx + C$$

$$\Rightarrow y\sin x = x^2 + C$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 + C}{\sin x}$$

تمرین:

معادلهٔ دیفرانسیل $xydx + (1 + x^2)dy = 0$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که معادله عامل انتگرال سازی دارد که تابعی فقط بر حسب x است و به کمک آن جواب معادله را بدست آورید.

ب) نشان دهید که معادله عامل انتگرال سازی دارد که تابعی فقط بر خسب y است و به کمک آن جواب معادله را بدست آورید.

ج) جوابهای بدست آمده در قسمتهای الف و ب را با هم وفق دهید.

نتیجه:

عامل انتگرال ساز منحصر به فرد نیست.

$$Mdx + Ndy = 0 \quad *$$

تمرین:

چه موقع معادلهٔ * عامل انتگرال سازی دارد که تابعی بر حسب متغیرهای زیر است؟

$u = x - y$ $\qquad$ $u = x.y$

$u = x^2 y$ $\qquad$ $u = x^2 + y^2$

$u = xy^2$ $\qquad$ $u = \frac{x}{y}$

$u = \frac{y}{x}$

پایان