Mathematics by Dr. Moslehi: Teaching & Research

جلسه ۳

معادلات دیفرانسیل

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه سوم

فصل اول
معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.ir موجود می باشد

در فصل اول، هدف ما حل معادلات مرتبه اول به فرم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

یا بطور معادل به فرم:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

می باشد

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \equiv \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

ساده ترین نوع

معادلات جدا پذیر

معادلات همگن

معادلات کامل

موضوع بحث امروز

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

معادلات کامل

که اگر دسته منحنی یک پارامتری $f(x,y) = c$ داده شده باشد، با **مشتق گیری ضمنی**، معادلهٔ دیفرانسیل دسته منحنی فوق بدست می آید.

$$f(x,y) = c$$

$$G = f(x,y) - c = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = 0$$

در بحث معادلات کامل عکس موضوع مقابل مورد استفاده قرار می گیرد.اگر معادله

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = 0$$

داده شده باشد، دسته منحنی یک پارامتری $f(x,y) = c$ جواب آن خواهد بود.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.ir موجود می باشد

معادلات کامل

مثلاً اگر دسته منحنی

$$\overbrace{x^2+3xy+4y^2}^{f(x,y)}=C \qquad \textbf{A}$$

را در نظر بگیریم آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل آن عبارتست از:

$$\underbrace{(2x\ +\ 3y)}_{\frac{\partial f}{\partial x}}\,dx+\underbrace{(3x\ +\ 8y)}_{\frac{\partial f}{\partial y}}\,dy=0 \qquad \textbf{B}$$

بنابر این:

اگر معادله $(2x\ +\ 3y)\,dx\ +\ (3x\ +\ 8y)\,dy\ =\ 0$ داده شده باشد، آنگاه دسته منحنی یک پارامتری $x^2+3xy+4y^2=C$ جواب آن خواهد بود.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.ir موجود می باشد

mbdm
Mathematics by Dr. Moslehi: Teaching & Research

معادلات کامل

اگر معادله

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = 0 \qquad \boxed{1}$$

داده شده باشد، دسته منحنی یک پارامتری $f(x,y) = c$ جواب آن خواهد بود.

اگر معادله

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \boxed{*}$$

داده شده باشد و تابع دو متغیره $f(x,y)$ موجود باشد بطوری که

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

آنگاه معادله $\boxed{*}$ به معادله $\boxed{1}$ تبدیل شده و لذا دسته منحنی یک پارامتری $f(x,y) = c$ جواب معادله $\boxed{*}$ خواهد بود.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.ir موجود می باشد

معادلات کامل

اگر معادله

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad \boxed{❊}$$

داده شده باشد و تابع دو متغیره $f(x,y)$ موجود باشد بطوری که

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)\end{cases}$$

آنگاه معادله $\boxed{❊}$ را یک **معادله کامل** گوییم.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

معادلات کامل

گاهی اوقات ممکن است بتوانیم وجود تابعی مانند $f(x,y)$ را که در دو شرط مذکور صدق کند حدس بزنیم. مثلاً اگر معادلهٔ

$$ydx + xdy = 0$$

داده شده باشد آنگاه تابع

$$f(x,y) = xy$$

هر دو شرط

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = x \end{cases}$$

را دارد. لذا $xy = c$ جواب معادلهٔ قبل می باشد.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

معادلات کامل

یا مثلاً اگر معادلهٔ

$$-\frac{y}{x^2}\,dx+\frac{1}{x}\,dy=0$$

داده شده باشد آنگاه تابع

$$f(x,y)=\frac{y}{x}$$

هر دو شرط

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=-\dfrac{y}{x^2}\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$$

را دارد. لذا $xy=c$ جواب معادلهٔ قبل می باشد.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

معادلات کامل

توجه:

معادلۀ

$$ydx + xdy = 0$$

جدا پذیر نیز می باشد. همینطور این معادله همگن هم می باشد. ضمناً بر اساس توضیحات قبل کامل نیز هست.

بعد از معرفی معادلات خطی مرتبۀ اول، حتی می توان نشان داد که این معادله خطی نیز می باشد. از این مطالب نتیجه می گیریم که:
انواع مختلف معادلات مرتبۀ اول که در این فصل مطرح می شود جدا از هم نیستند.
(ممکن است یک معادله هم جدا پذیر و هم همگن باشد و ...)

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

mbdm
Mathematics by Dr. Moslehi: Teaching & Research

معادلات کامل

حال در بحث معادلات کامل دو سؤال زیر مطرح می شود:

۱- با چه روشی می توانیم از وجود تابع $f(x,y)$ که هر دو شرط

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

را داشته باشد مطمئن شویم؟

(**به عبارت دیگر چگونه متوجه شویم که معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل است؟**)

۲- در صورتی که تابع $f(x,y)$ وجود داشته باشد چگونه می توان آن را بدست آورد.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.irموجود می باشد

معادلات کامل

در ارتباط با پاسخ اول می توان آزمون مهم زیر را ارائه داد.

آزمون:

معادلهٔ دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ کامل است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

در رابطه با پاسخ سؤال (۲) در حل مسئل توضیح خواهیم داد.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.irموجود می باشد

معادلات کامل

در ارتباط با پاسخ اول می توان آزمون مهم زیر را ارائه داد.

آزمون:

معادلهٔ دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ کامل است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

در رابطه با پاسخ سؤال (۲) در حل مسئل توضیح خواهیم داد.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.irموجود می باشد

معادلات کامل

مثال:

$$(2xy - \tan y)\, dx + (x^2 - x \sec^2 y)\, dy = 0$$

حل:

$$\underbrace{(2xy - \tan y)}_{M} dx + \underbrace{(x^2 - x \sec^2 y)}_{N} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial N} = 2xy - \sec^2 y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

پس معادلهٔ بالا کامل است.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

معادلات کامل

$$\underbrace{(2xy - tg\ y)}_{M}\, dx + \underbrace{(x^2 - x\ sec^2 y)}_{N}\, dy = 0$$

ادامه حل:

لذا تابع $f(x,y)$ وجود دارد بطوری که:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \tan y \rightarrow f(x,y) = \displaystyle\int (2xy - \tan y)dx = x^2 y - x\tan y + g(y) \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - xsec^2 y + \dfrac{dg}{dy} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - xsec^2 y \end{cases}$$

$$\frac{dg}{dy} = 0 \rightarrow g(y) = k$$

$$f(x,y) = x^2 y - x\tan y + k$$

$$x^2 y - x\tan y + k = C_1$$

$$x^2 y - x\tan y = C$$

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.ir موجود می باشد

معادلات کامل

مثال:

$$(3x^2y + y^2)\,dx = (-x^3 + 2xy)\,dy$$

حل:

$$\underbrace{(3x^2y + y^2)}_{M}\,dx + \underbrace{(x^3 - 2xy)}_{N}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 + 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 - 2y$$

پس معادلهٔ بالا کامل نیست.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد
Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

mbdm
Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

معادلات کامل

مثال:

$$dx = \frac{y}{1-x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1-x^2y^2}\,dy$$

حل:

$$\left(\frac{y}{1-x^2y^2}-1\right)dx + \frac{x}{1-x^2y^2}\,dy = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{y}{1-x^2y^2}-1\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(\frac{x}{1-x^2y^2}\right)}_{N} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1-x^2y^2+2x^2y^2}{(1-x^2y^2)^2} = \frac{1+x^2y^2}{(1-x^2y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

پس معادلهٔ بالا کامل است.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

معادلات کامل

$$\underbrace{\left(\frac{y}{1-x^2y^2}-1\right)}_{M}dx+\underbrace{\left(\frac{x}{1-x^2y^2}\right)}_{N}dy=0$$

ادامه حل:

لذا تابع $f(x,y)$ وجود دارد بطوری که:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{1-x^2y^2}-1\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{1-x^2y^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{1-x^2y^2}-1\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{1-x^2y^2}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\int\frac{xdy}{1-x^2y^2}+h(x)$$
$$=-\frac{1}{2}Ln\,|1-xy|+\frac{1}{2}Ln\,|1+xy|+h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{1-x^2y^2}+\frac{dh}{dx}$$

$$\frac{dh}{dx}=-1$$

$$h(x)=-x$$

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.ir موجود می باشد

معادلات کامل

$$f(x,y) = \frac{1}{2} Ln\,|1 - xy| + \frac{1}{2} Ln\,|1 + xy| - x$$

$$\frac{1}{2} Ln\,|1 - xy| + \frac{1}{2} Ln\,|1 + xy| - x = C$$ جواب عمومی

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس
www.mbdm.irموجود می باشد

عامل انتگرال ساز

تعریف: فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad *$$

کامل نباشد (M و N توابعی دو متغیره بر حسب x و y هستند)، اگر تابعی مثل

$$P(x, y)$$

به قسمتی وجود داشته باشد که با ضرب کردن آن در طرفین معادلهٔ قبل معادله ای کامل بدست آید یعنی معادلهٔ $PMdx + PNdy = 0$ کامل باشد. در اینصورت تابع را عامل انتگرال ساز (ع.ا.) برای معادلهٔ * می گوئیم.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.irموجود می باشد

عامل انتگرال ساز

لازم به توضیح است که با روش حل معادلات کامل می توان معادلۀ

$$PMdx + PNdy = 0$$

را حل کرد و در واقع جواب عمومی معادلۀ (۱) بدست خواهد آمد. ولی موضوع مهم در این بخش چگونگی محاسبۀ عامل (ع.ا.) است که راجع به این موضوع مفصلاً توضیح خواهیم داد.

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.irموجود می باشد

عامل انتگرال ساز

مثال: معادله دیفرانسیل $(y^2+y)dx - xdy = 0$ داده شده است. نشان دهید که این معادله کامل نیست. اما اگر طرفین آن را در $\frac{1}{y^2}$ ضرب کنیم به یک معادلهٔ کامل تبدیل می شود (در واقع $\frac{1}{y^2}$ عامل انتگرال ساز این معادله است.)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

معادله کامل نیست

حال طرفین معادله را در $\frac{1}{y^2}$ ضرب می کنیم.

$$\frac{1}{y^2}(y^2+y)dx - \frac{1}{y^2}xdy = 0$$

$$(1+\frac{1}{y})\,dx - \frac{x}{y^2}\,xdy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.irموجود می باشد

پایان

این جزوه در وب سایت دکتر محمد هادی مصلحی به آدرس www.mbdm.ir موجود می باشد