# جلسه ۲

## معادلات دیفرانسیل

Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

**جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی**

**دکتر محمد هادی مصلحی**
**کارشناسی:** ریاضی کاربردی
**کارشناسی ارشد:** ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
**دکتری:** هندسه ( نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه دوم

# فصل اول
# معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در فصل اول، هدف ما حل معادلات مرتبه اول به فرم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

یا **بطور معادل** به فرم:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

می باشد

# معادلات دیفرانسیل همگن

**تعریف: تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه $n$ گوییم هرگاه**

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

**که در آن $x$ ، $y$ و $t$ به طرز مناسبی اختیار شده باشند.**

**مثال : تابع $f(x,y)=x^2+y^2+y^2\ln\frac{x}{y}$ همگن از درجه ۲ است زیرا:**

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2+(ty)^2\ln\frac{(tx)}{(ty)}$$

$$=(tx)^2+(ty)^2+(ty)^2\ln\frac{(tx)}{(ty)}$$

$$=t^2\left(x^2+y^2+y^2\ln\frac{x}{y}\right)=t^2 f(x,y)$$

# معادلات دیفرانسیل همگن

**تعریف (تابع همگن): تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه $n$ گوییم هرگاه**

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

**که در آن $x$ ، $y$ و $t$ به طرز مناسبی اختیار شده باشند.**

**مثال : تابع $f(x,y)=x^2+y^2+y^2\ln\frac{x}{y}$ همگن از درجه ۲ است زیرا:**

$$\boldsymbol{f(tx,ty)}=(tx)^2+(ty)^2+(ty)^2\ln\frac{(tx)}{(ty)}$$

$$=(tx)^2+(ty)^2+(ty)^2\ln\frac{(tx)}{(ty)}$$

$$=t^2\left(x^2+y^2+y^2\ln\frac{x}{y}\right)=\boldsymbol{t^2 f(x,y)}$$

# معادلات دیفرانسیل همگن

مثال : تابع $f(x,y)=\sqrt{y}\,\sin\frac{x}{y}$ همگن از درجه $\frac{1}{2}$ است زیرا:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\boldsymbol{y})=\sqrt{ty}\,\sin\frac{tx}{ty}$$

$$=\sqrt{t}\sqrt{y}\,\sin\frac{x}{y}$$

$$=\boldsymbol{t}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

# معادلات دیفرانسیل همگن

مثال : تابع $f(x,y)=\frac{x+1}{y-x}$ همگن نیست

$$f(x,y)=\frac{x+1}{y-x}$$

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)+1}{(ty)-(tx)}$$

$$=\frac{(tx)+1}{(ty)-(tx)}$$

# معادلات دیفرانسیل همگن

**تعریف (معادله همگن):**

**معادله**

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

**را همگن گوییم هرگاه تابع $f(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد.**

**یا**

**معادله**

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

**را همگن گوییم هرگاه توابع $M(x,y)dx$ و $N(x,y)$ همگن و هم درجه باشند.**

# روش حل معادله همگن:

معادله همگن $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ را می توان با **تغییر متغیر** $v=\frac{y}{x}$ به یک معادله جداپذیر تبدیل کرد.

اگر معادله $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ همگن باشد

⬇

تابع $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ همگن از درجه صفر است

⬇

$$f(tx,ty)=t^0 f(x,y)=f(x,y)$$

⬇

$$f(x,y)=f(tx,ty)=f\left(\frac{1}{x}x,\frac{1}{x}y\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(1,v)$$

⬇

$$f(x,y)=f(1,v)$$

$$v=\frac{y}{x}$$

⬇

$$y=vx$$

⬇

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}x+v\frac{dx}{dx}$$

⬇

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}x+v$$

## روش حل معادله همگن:

معادله همگن

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v$$

$$f(x,y) = f(1,v)$$

$$\frac{dv}{dx}x + v = f(1,v)$$

$$\frac{dv}{dx}x = f(1,v) - v \rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{f(1,v) - v}{x}$$

$$\frac{dv}{f(1,v) - v} = \frac{dx}{x}$$

معادله جداپذیر

# مثال برای معادلات دیفرانسیل همگن

معادله : $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

حل معادله :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$$

$$\frac{dv}{dx}x + v = \frac{x^2 - x(vx) + (vx)^2}{x(vx)}$$

$$\frac{dv}{dx}x + v = \frac{(1 - v + v^2)}{v}$$

$$\frac{dv}{dx}x + v = \frac{1 - v}{v} + v$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{1 - v}{v}$$

ادامه حل معادله :

$$\frac{vdv}{1 - v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{vdv}{1 - v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$1 - v - \ln|(1 - v)| = \ln|x| + C$$

$$1 - \frac{y}{x} - \ln\left|\left(1 - \frac{y}{x}\right)\right| = \ln|x| + C$$

## بحث در مورد معادله $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+d_1}{a_2x+b_2y+d_2}$

$L_1:\ a_1x+b_1y+d_1=0$

$L_2:\ a_2x+b_2y+d_2=0$

اگر دو خط $L_1$ و $L_2$ موازی باشند.

یعنی : $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$

می توان معادله فوق را به یک معادله جدا پذیر تبدیل کرد

اگر دو خط $L_1$ و $L_2$ متقاطع باشند.

یعنی : $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$

می توان معادله فوق را به یک معادله همگن تبدیل کرد

## بحث در مورد معادله $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_1x+b_1y+d_1}{a_2x+b_2y+d_2}$

اگر دو خط $L_1$ و $L_2$ موازی باشند.

یعنی : $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$

عدد $k$ وجود دارد بطوری که

$$a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$$

با تغییر متغیر $u = a_1x + b_1y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + d_1}{a_2x + b_2y + d_2} = \frac{a_1x + b_1y + d_1}{k(a_1x + b_1y) + d_2} = \frac{u + d_1}{ku + d_2}$$

$$u = a_1x + b_1y \rightarrow \frac{du}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - a_1}{b_1}$$

$$\frac{\frac{du}{dx} - a_1}{b_1} = \frac{u + d_1}{ku + d_2}$$

$$\frac{du}{dx} = b_1\left(\frac{u + d_1}{ku + d_2}\right) + a_1$$

$$\frac{du}{b_1\left(\frac{u + d_1}{ku + d_2}\right) + a_1} = dx$$

معادله جداپذیر

## بحث در مورد معادله $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+d_1}{a_2x+b_2y+d_2}$

اگر دو خط $L_1$ و $L_2$ متقاطع باشند.

یعنی : $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$

با تغییر متغیر $\begin{cases}X=x-h\\Y=y-k\end{cases}$ ، معادله به یک معادله همگن تبدیل می شود. که نقطه $(h,k)$ محل تلاقی دو خط $L_1$ و $L_2$ می باشد.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+d_1}{a_2x+b_2y+d_2}\rightarrow\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}$$

معادله جداپذیر

پایان