Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

جلسه ۱

معادلات دیفرانسیل

جزوه معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر محمد هادی مصلحی
کارشناسی: ریاضی کاربردی
کارشناسی ارشد: ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی
دکتری: هندسه (نظریه معادلات و سیستم های دینامیکی)

وب سایت: www.mbdm.ir

جلسه اول

فصل اول
معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

معادلات دیفرانسیل

تعریف: به هر معادله شامل یک متغیر وابسته، یک یا چند متغیر مستقل و مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل، معادلهٔ دیفرانسیل می گوئیم. تساویهای زیر نمونه هایی از معادلات دیفرانسیل هستند.

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

متغیر وابسته : y

متغیر مستقل : x

مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل : $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2 y}{d x^2}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = xt$$

متغیر وابسته : y

متغیرهای مستقل : x و t

مشتقات متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل : $\frac{\partial y}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$ و $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

معادلات دیفرانسیل

تساویهای زیر نمونه هایی از معادلات دیفرانسیل هستند.

الف $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2x$

ب $\frac{d^2\, y}{d\, x^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5\, y = 0$

ج $x^2y'' + 4\, xy' + 3y = 0$

د $x^3y''' + 4x^2y'' + 2xy' + 3y = 0$

هـ $y^{(6)} + y^{(4)} + y'' + y = 0$

و $\frac{\partial^2 y}{\partial\, x^2} + \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = 0$

معادلات دیفرانسیل معمولی

الف $\frac{dy}{dx} = 2x$

ب $\frac{d^2 y}{d x^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

ج $x^2y'' + 4xy' + 3y = 0$

د $x^3y''' + 4x^2y'' + 2xy' + 3y = 0$

هـ $y^{(6)} + y^{(4)} + y'' + y = 0$

و $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = 0$

در تمام معادلات بالا y متغیر وابسته و x متغیر مستقل است اما معادلهٔ آخر دو تا متغیر مستقل دارد که عبارتند از x و t

معادله هایی را که فقط یک متغیر مستقل داشته باشند، معادلهٔ دیفرانسیل عادی یا معمولی می نامند (معادلات بالا همه از نوع معمولی اند بجز معادلهٔ آخر) و چنانچه در معادله بیش از یک متغیر مستقل ظاهر شود، معادله را از نوع با مشتقات جزئی می گویند. (معادله (و))

مرتبه معادلات دیفرانسیل معمولی

الف $\frac{dy}{dx} = 2x$

ب $\frac{d^2 y}{d x^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5\,y = 0$

ج $x^2y'' + 4\,xy' + 3y = 0$

د $x^3y''' + 4x^2y'' + 2xy' + 3y = 0$

هـ $y^{(6)} + y^{(4)} + y'' + y = 0$

تعریف:مرتبهٔ بالاترین مشتق موجود در معادله را، مرتبهٔ آن معادلهٔ دیفرانسیل گویند.

در مثال قبل معادلهٔ الف مرتبهٔ اول، معادلات ب و ج از مرتبهٔ دوم، معادلهٔ د از مرتبهٔ سوم و هـ از مرتبهٔ ششم می باشد.

فرم کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n ام معمولی

فرم کلی یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n ام به صورت زیر است:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

و چنانچه از نماد پریم استفاده کنیم عبارتست از

$$F\ (x\ , y\ , y'\ , y''\ , y'''\ , y^{(4)}\ , \dots , y^{(n)}) = 0$$

توضیح:
به عنوان مثال، دریک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با فرم کلی $F\ (x\ ,y\ ,y'\ ,y'') = 0$ ، وجود y'' الزامی است زیرا مرتبه دوم بودن معادله را از روی y'' تشخیص دادیم ولی x، y و y' می توانند در معادله نباشند. مثلا معادله $y'' = 0$، یک معادله مرتبه دوم است ولی x، y و y' در آن دیده نمی شوند.

$$F\,(x\,,y\,,y'\,,y''\,,y'''\,,y^{(4)}\,,\dots,y^{(n)}) \;=\; 0$$

معادله بالا بنابر ماهیت ضمنی خود، ممکن است دسته ای از معادلات دیفرانسیل را نمایش دهد. مثلا معادله ضمنی

$$(\acute{y})^3 + 3x^2(\acute{y})^2 + 3y\acute{y} = 0$$

به سه معادله به صورت زیر منجر می شود:

$$\boxed{\acute{y} = 0} \qquad \boxed{\acute{y} = \frac{3x^2 + (9x^2 - 12x)^{\frac{1}{2}}}{2}} \qquad \boxed{\acute{y} = \frac{3x^2 - (9x^2 - 12x)^{\frac{1}{2}}}{2}}$$

$$F\,(x\,,y\,,y'\,,y''\,,y'''\,,y^{(4)}\,,\dots,y^{(n)}) = 0$$

برای اجتناب از ابهام احتمالی، فرض می کنیم که معادله فوق نسبت به $y^{(n)}$ حل پذیر باشد. در این صورت می توان آن را به فرم

$$y^{(n)} = \boldsymbol{f}\big(x\,,y\,,y'\,,y''\,,y'''\,,y^{(4)}\,,\dots,y^{(n-1)}\big)$$

نوشت.

اگر g نسبت به y، y'، ... و $y^{(n-1)}$ خطی باشد آنگاه معادله فوق را **خطی** نامیم و در غیر این صورت این معادله **غیرخطی** نامیده خواهد شد.

Mathematics by Dr. Moslehi : Teaching & Research

مثال:

$y' + y = 0$ خطی

$y'' + y = 0$ خطی

$y' + y^2 = 0$ غیر خطی

$\cos y\, y'' + \sin 2y = 0$ غیر خطی

$\cos x\, y'' + xy' - \sin 2x = 0$ خطی

جواب معادلات دیفرانسیل معمولی

$$y^{(n)} = \boldsymbol{f}\left(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

تعریف: (جواب)

تابعی مانند $g(x)$ را یک جواب معادله بالا بر بازه $r_1 < x < r_1$ می نامیم هرگاه $g(x)$ بر این بازه تعریف شده و n بار مشتق پذیر باشد و به ازای هر $x \in (r_1, r_2)$ داشته باشیم:

$$y^{(n)} = \boldsymbol{f}\left(x, g(x), g'(x), g''(x), g'''(x), g^{(4)}(x), \ldots, g^{(n-1)}(x)\right)$$

به عبارت ساده تر، گفته می شود تابعی مانند $y = g(x)$ جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل $y^{(n)} = \boldsymbol{f}\left(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n-1)}\right)$ است، هرگاه با قرار دادن تابع و مشتقات آن در معادله، اتحادی بر حسب متغیر مستقل x بدست آوریم (به عبارت دیگر، تابع در معادله صدق کند).

جواب معادلات دیفرانسیل معمولی

مثال: (جواب)

تحقیق کنید که آیا تابع داده شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه است یا خیر؟

$$y'' + 4y = 0, \quad y = C_1 \sin 2x + C_2\, cos2x$$

پاسخ:

$$Y' = 2C_1 cos2x - 2C_1 sin2x$$

$$y'' = -4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x$$

در معادله قرار می دهیم

$$y'' + 4y = (-4C_1 sin2x - 4C_2 cos2x) + 4\,(C_1 sin2x + C_2 \cos 2x) = 0$$

تابع داده شده به ازای کلیهٔ مقادیر ثابت C_1 و C_2 جواب معادله است.

جواب معادلات دیفرانسیل معمولی

مثال: (جواب)

تحقیق کنید که آیا تابع داده شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه است یا خیر؟

$$xy' - y - xx^2e^{-x^2} = 0, \qquad y = x\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

پاسخ:

$$y' = \int_0^x e^{-t^2}\,dt + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)'x = \int_0^x e^{-t^2}\,dt + xe^{-x2}$$

مقادیر y و y' را در معادله قرار می دهیم.

$$xy' - y - x^2e^{-x^2} = x\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt + xe^{-x2}\right) - x\int_0^x e^{-t^2}\,dt + x^2e^{-x^2} = 0$$

تابع جواب معادله است.

مثال: (جواب)

تحقیق کنید که آیا تابع داده شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه است یا خیر؟

$$y'' + y = 0 \,, \qquad y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

پاسخ:

$$y' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad y' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots$$

$$y'' = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad y'' = \frac{-2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \cdots$$

$$y'' + y = \ \dots = 0$$

لذا سری توانی داده شده جواب معادله است

جواب معادلات دیفرانسیل معمولی

مثال: (جواب)

تحقیق کنید که آیا تابع داده شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه است یا خیر؟

$$y'' + (y')^4 + 1 = 0, \qquad y = Ln\,(cos\,(x - C_1)) + C_2$$

پاسخ:

$$y' = \frac{-\,sin(x - C_1)}{cos(x - C_1)} = -tg(x - C_1)$$

$$y'' = -\,sec^2(x - C_1)$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{y}'' + (\mathrm{y}')^2 + 1 \\ &= -\mathrm{sec}^2(\mathrm{x} - \mathrm{C}_1) + \left(-\mathrm{tg}(\mathrm{n} - \mathrm{C}_1)\right)^2 + 1 \\ &= -\mathrm{sec}^2(\mathrm{x} - \mathrm{C}_1) + \mathrm{sec}^2(\mathrm{x} - \mathrm{C}_1) = 0 \end{aligned}$$

تابعه داده شده جواب معادله است

در ادامه فصل اول، هدف ما حل معادلات مرتبه اول به فرم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

یا **بطور معادل** به فرم:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

خواهد بود

ساده ترین نوع معادلات دیفرانسیل معمولی

ساده ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه اول دارای فرم زیر است:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (1)$$

که در آن f تابعی یک متغیره بر حسب x است. برای حل این معادله به روش زیر عمل می کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \rightarrow dy = f(x)dx$$

$$\rightarrow \int dy = \int f(x)dx$$

$$\rightarrow y = \int f(x)dx + C$$

فرمول بالا به ازای مقادیر مختلف C، کلیۀ جوابهای معادلۀ دیفرانسیل (۱) را ارائه می دهد. به این دلیل آنرا جواب عمومی معادلۀ (۱) می نامیم.

ساده ترین نوع معادلات دیفرانسیل معمولی

مثال: (ساده ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه اول)

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad (1)$$

برای حل این معادله به روش زیر عمل می کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow dy = 2xdx$$

$$\rightarrow \int dy = \int 2xdx$$

$$\rightarrow \quad y = x^2 + C$$

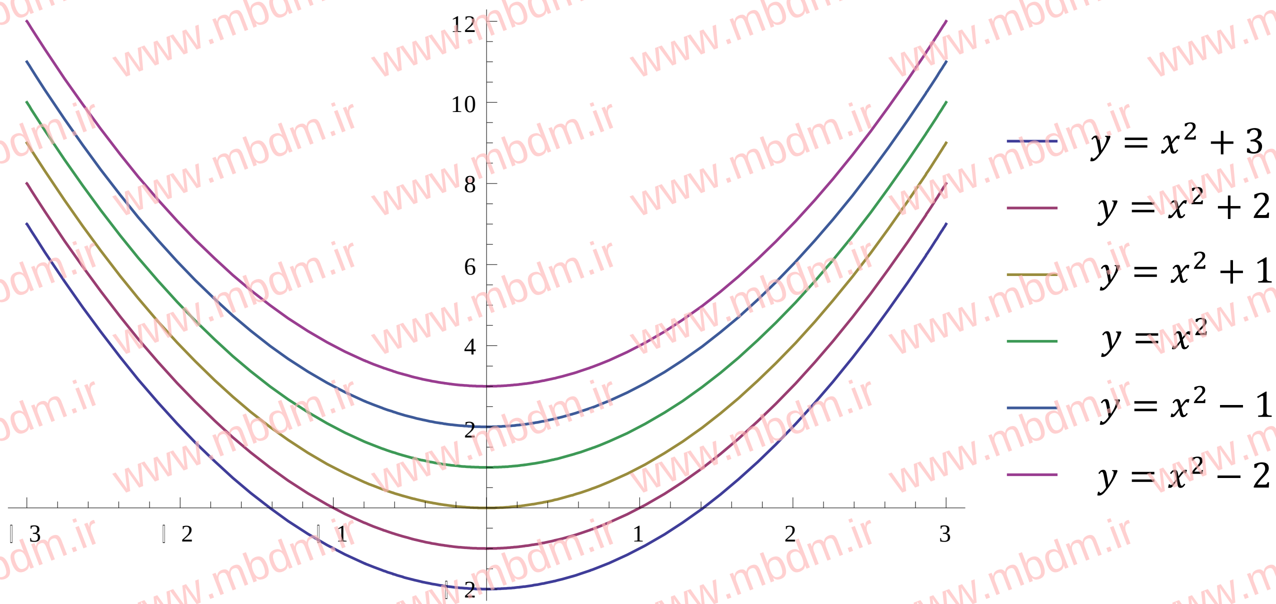
این جواب را جواب عمومی معادلۀ (۱) می نامند.

دسته منحنی

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \rightarrow \quad y = x^2 + C$$ **جواب عمومی**

جواب عمومی، یک دسته منحنی تک پارامتری (با پارامتر C) ارائه می دهد.

در زیر، چند منحنی خاص از دسته منحنی تک پارامتری $y = x^2 + C$ رسم شده است.



جواب اختصاصی

مثال: جوابی از معادله زیر را بیابید که در شرط $y(3)=4$ صدق کند

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

حل: ابتدا جواب عمومی مساله را می یابیم که عبارتست از:

$$y=x^2+C$$

سپس شرط داده شده را اعمال می کنیم

$$y=x^2+C \xRightarrow{y(3)=4} 4=3^2+C \quad \Rightarrow C=-5$$

بنابر این جواب مد نظر برابر با

$$y=x^2+(-5)$$

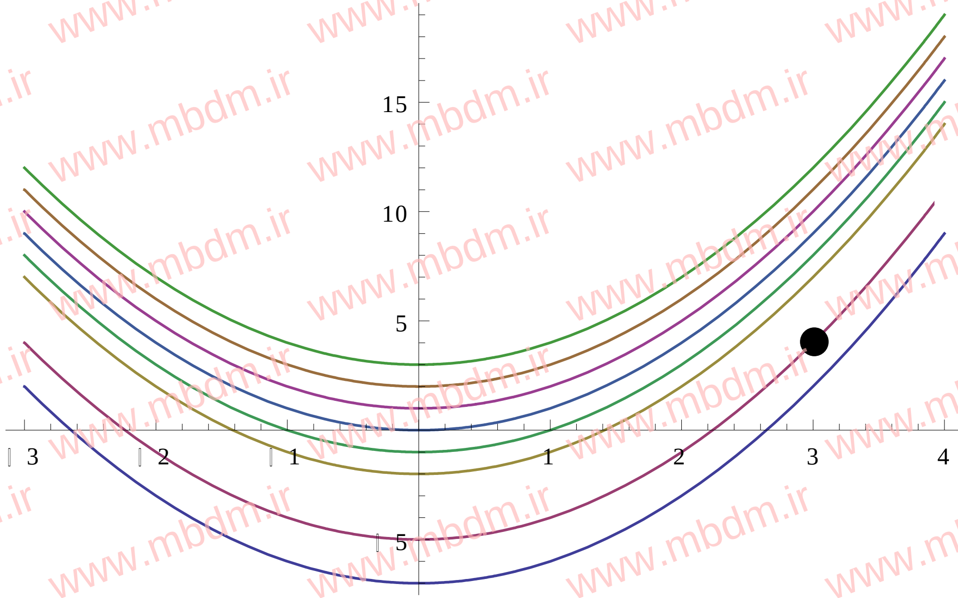
می باشد.

این جواب را یک جواب اختصاصی می نامیم.

بنابر این: جواب معادله $\frac{dy}{dx} = 2x$ **با شرط** $y(3) = 4$ **عبارتست از:**

$$y = x^2 + (-5)$$ **یک جواب اختصاصی**

منحنی $y = x^2 + (-5)$ ، یک منحنی خاص از **دسته منحنی** تک پارامتری $y = x^2 + C$ می باشد



چند نکته

نکته ۱:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (1)$$

هر معادلهٔ دیفرانسیلی حقیقی از نوع سادهٔ (۱)، در حالت کلی قابل حل نیست. گفتیم که جواب عمومی این معادله به صورت زیر است:

$$y = \int f(x)dx + C$$

لذا این معادله را در صورتی می توانیم حل کنیم که

$$\int f(x)dx$$

محاسبه شدنی باشد مثلاً معادلات $\frac{dy}{dx} = \frac{sinx}{x}$ **یا** $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}$ **قابل حل نیستند چون انتگرالهای** $\int e^{-x^2}\,dx$, $\int \frac{sinx}{x}dx$ **به روشهای مقدماتی محاسبه نمی شوند.**

چند نکته

نکته ۲:

$$y' = 2x \implies y = x^2 + C$$

$$y'' = 2x \implies y' = x^2 + C_1 \implies y = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$$\vdots$$

با توجه به مثالهای فوق می توان گفت:

اولا: اگرمعادله دیفرانسیل دارای یک جواب باشد، آنگاه دارای بی نهایت جواب است زیرا C ، C_1 و C_2 می توانند بی نهایت مقدار بگیرند. مثلا $y = x^2 + C$ به ازای هر C ، جواب معادله $y' = 2x$ است.

ثانیا: معمولاً در جواب عمومی هر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول یک مقدار ثابت اختیاری (موسوم به پارامتر) وجود دارد و در جواب عمومی هرمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم، دو ثابت اختیاری موجود است و ... و در جواب عمومی هرمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n–ام، n ثابت اختیاری موجود است.

ضمناً موضوع فوق همیشه درست نیست. به مثالهای بعدی توجه کنید.

چند نکته

.... ادامه نکته ۲:

مثال: معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول $(\frac{dy}{dx})^2+1=0$ اصلاً دارای جواب نیست .

مثال: معادلهٔ دیفرانسیلی $(\frac{dy}{dx})^2+y^2=0$ ، فقط دارای جواب $y=0$ می باشد که در این جواب هیچ مقدار ثابت اختیاری وجود ندارد.

مثال: جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(y'-3y)(y'-3y)=0$$

عبارتست از: (بعدا طریقه یافتن جواب را خواهید دید)

$$(y-c_1e^{3x})(y-c_2e^{2x})=0$$

که به جای یک ثابت، شامل دو ثابت اختیاری c_1 و c_2 است.

با این وجود:

در این درس، معادلاتی را بررسی می کنیم که جواب عمومی دارند و در جواب عمومی هرمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n–ام، n ثابت اختیاری موجود است.

چند نکته

نکته ۳:

همانطور که ملاحظه شد، معمولا در جواب عمومی هرمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n–ام، n ثابت اختیاری موجود است.

به عبارتی، جواب عمومی معادله مرتبه n–ام

$$F\,(x\,,y\,,y'\,,y''\,,y'''\,,y^{(4)}\,,\ldots,y^{(n)})\ =\ 0$$

یک خانواده n–پارامتری به فرم زیر است:

$$G\,(x\,,y\,,C_1\,,C_2\,,C_3\,,C_4\,,\ldots,C_n)\ =\ 0$$

گاهی اوقات، خانواده ای n–پارامتری داریم و می خواهیم معادله ای را بیابیم که خانواده مذکور، جواب آن باشد. برای این کار باید معادله دیفرانسیلی را تعیین کنیم که دارای شرایط زیر باشد:

۱– مرتبه آن برابر با تعداد ثابت های داده شده در خانواده باشد

۲– با خانواده داده شده سازگار باشد.

۳– ثابت های اختیاری در آن ظاهر نشده باشند.

به مثال بعدی دقت کنید

.... ادامه نکته ۳:

مثال: معادلهٔ دیفرانسیلی را بیابید که خانواده یک پارامتری از جوابهای آن به شکل زیر باشد:

$$y = Csinx + x$$

حل: (نسبت به x مشتق می گیریم به معادله دیفرانسیل می رسیم. اگر کماکان در معادله بدست آمده پارامتر C موجود باشد، بین معادله بدست آمده و دسته منحنی، پارامتر C را حذف می کنیم.

$$y' = Ccosx + 1 \xRightarrow{y=Csinx+x \Rightarrow C=\frac{y-x}{sinx}} y' = \frac{y-x}{sinx} cosx + 1$$

$$, \quad x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots .$$

چند نکته

نکته ۴:

معادله:

$$y' = 2$$

جواب عمومی:

$$y = x^2 + C$$

جوابهای اختصاصی

$$y = x^2 + 1$$

$$y = x^2 + 3$$

$$y = x^2 - 8$$

$$y = x^2 + \sqrt[3]{7}$$

$$y = x^2 + \frac{1}{17}$$

$\cdots$ $\vdots$ $\ddots$

چند نکته

نکته ۴:

معادله (مشهور به کلرو):

$$y = xy' + (y')^2$$

خانواده یک پارامتری به عنوان جواب معادله کلرو:

$$y = xC + (C)^2$$

جواب منفرد (غیر عادی):

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

نمی توان عددی را پیدا کرد که با نسبت دادن آن به C ، جواب $y = -\frac{x^2}{4}$ از خانواده یک پارامتری $y = xC + (C)^2$ بدست آید. به همین دلیل این جواب را منفرد یا غیر عادی گوییم. با این حال خانواده یک پارامتری $y = xC + (C)^2$ را جواب عمومی خواهیم نامید.

معادله:

$$y' = 2$$

جواب عمومی:

$$y = x^2 + C$$

جوابهای اختصاصی

$$y = x^2 + 1$$

$$y = x^2 - 8$$

$$y = x^2 + 3$$

$$y = x^2 + \sqrt[3]{7}$$

$$y = x^2 + \frac{1}{17}$$

$\vdots$

معادلات جداپذیر

اگر بتوان با استفاده از اعمال مجاز ریاضی، اجزای معادله

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

را به گونه ای به طرفین تساوی منتقل کرد که یک طرف فقط بر حسب x و طرف دیگر فقط بر حسب y باشد، آنگاه آن معادله را جداپذیر نامیم.

یک معادله جدا پذیر به فرم زیر قابل تبدیل است:

$$g(y)dy = f(x)dx$$

با انتگرال گیری از طرفین، جواب عمومی معادله به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)dx + C$$

معادلات جداپذیر

مثال:

$$2x(y+1)dx + (x^2-1)dy = 0$$

$$(x^2-1)dy = -2x\,(y+1)dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{-2x\,(y+1)dx}{(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y+1} = \frac{-2xdx}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow Ln|y+1| = -Ln|x^2-1| + C$$

جواب عمومی

می توان جواب را به شکل زیر نیز نوشت:

$$Ln|y+1| = -Ln|x^2-1| + Ln|C_1|$$

$$Ln\,|y+1| = Ln\left|\frac{C_1}{x^2-1}\right|$$

$$\Rightarrow |y+1| = \left|\frac{C_1}{x^2-1}\right|$$

$$\Rightarrow y+1 = \pm\frac{C_1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow y+1 = \frac{C_1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{C_1}{x^2-1} - 1$$

معادلات جداپذیر

مثال:

$$yy' = y^2x^3 + y^2x$$

$$y\frac{dy}{dx} = y^2\,(x^3 + x)$$

$$\Rightarrow\ ydy = y^2(x^3 + x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y^2}\,dy = x\,(x^2 + 1)dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = (x^3 + x)dx$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int(x^3 + x)\ dx$$

$$\Rightarrow\ Ln\,|y| = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$$ جواب عمومی

می توان جواب را به شکل زیر نیز نوشت:

$$|y| = e^{(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C)}$$

$$\Rightarrow |y| = e^C e^{(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2)}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^C e^{(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2)}$$

$$\xrightarrow{C_1=\pm e^C} y = C.e^{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2}$$

معادلات جداپذیر

مثال : معادله $y' = \dfrac{x^2 + x}{y^2 - y}$ **را حل می کنیم.**

حل :داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x}{y^2 - y}$$

آن گاه

$$\left(x^2 + x\right)dx = \left(y^2 - y\right)dy$$

درنتیجه

$$\int \left(x^2 + x\right) dx = \int \left(y^2 - y\right) dy + C$$

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + C$$

جواب عمومی

پایان