جزوه روشهای انتگرالگیری

دانشگاه پیام نور مرکز بیرجند

دکتر محمد هادی مصلحی

www.mbdm.ir

در این جزوه هدف ارائه روش های انتگرال گیری است که توسط آن ها و قضایای اساسی انتگرال، می توان انتگرال معین یک تابع پیوسته در یک فاصله را تعیین کرد.

۱- روش جزء به جزء:

فرض کنید u و v توابع مشتق پذیر از x باشند، در این صورت :

$$\frac{d}{dx}(u.v) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \quad \rightarrow \quad u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(u.v) - v\frac{du}{dx}$$

اکنون با انتگرال گیری از روابط فوق:

$$\int u\,\frac{dv}{dx}\ dx = \int \frac{d}{dx}\,(u.v)dx - \int u\,\frac{du}{dx}\,dx$$

یا به عبارت دیگر:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

در صورتی که هدف انتگرال معین باشد آنگاه :

$$\int_a^b u\,dv = [uv\,]_a^b - \int_a^b v\,du$$

مثال :

1) $\int xe^x\,dx$ $\quad \begin{cases} u = x & \rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^x dx & \rightarrow \quad v = e^x \end{cases}$

$$\rightarrow \ \int xe^x\,dx = \ xe^x \ - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

مثال :

2) $\int \ln x\,dx$ $\quad \begin{cases} u = \ln x & \rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & \rightarrow \quad v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

مثال :

3) $\int x\sin x\,dx$ $\quad \begin{cases} u = x & \rightarrow \quad du = dx \\ dv = \sin x\,dx & \rightarrow \quad v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + c$$

مثال :

$$4)\ \int \tan^{-1} x\, dx \qquad \begin{cases} u = \tan^{-1} x & \rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ dv = dx & \rightarrow \quad v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

مثال :

$$5)\ \int x^2 e^x\, dx \qquad \begin{cases} u = x^2 & \rightarrow \quad du = 2x\, dx \\ dv = e^x\, dx & \rightarrow \quad v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2x\, e^x\, dx \xrightarrow{\text{مثالهای قبلی}} x^2 e^x - 2x\, e^x + 2e^x + c$$

مثال :

$$6)\ \int e^x \sin x\, dx \qquad \begin{cases} u = e^x & \rightarrow \quad du = e^x\, dx \\ dv = \sin x\, dx & \rightarrow \quad v = -\cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

برای بار دوم جزء به جزء را روی $\int e^x \cos x\, dx$ اعمال می کنیم.

$$\begin{cases} u = e^x & \rightarrow \quad du = e^x\, dx \\ dv = \cos x\, dx & \rightarrow \quad v = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

گاهی اوقات در محاسبه انتگرالها لازم است ابتدا یک تغییر متغیر ظاهری بدهیم و بعد از روش جزء به جزء استفاده کنیم.

مثال : $\int \sin \sqrt{x}\, dx$

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \rightarrow dx = 2t\, dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\cos t \end{cases} \Rightarrow \quad \int \sin \sqrt{x}\, dx = 2 \int t \sin t\, dt \Rightarrow \begin{cases} u = t \\ dv = \sin dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int t \sin dt = -t \cos t + \int \cos t\, dt = -t \cos t + \sin t + c$$

بنابراین:

$$\boxed{\int \sin \sqrt{x}\, dx = -2 \sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c}$$

مثال: فرض کنید تابع f روی بازه $[a,b]$ دارای مشتق پیوسته است و $\mathrm{f(a)=f(b)=0}$ و $\int_a^b (f(x))^2 dx = 1$
.

ثابت کنید : $\int_a^b x\, f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$

حل :

$$\begin{cases} u = x\, f(x) \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = (f(x) + x\, f'(x))dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_a^b x\, f(x) f'(x) dx = x(f(x))^2 \int_a^b - \int_a^b f(x)\big(f(x) + x\, f'(x)\big)dx$$

$$= b\,(f(b))^2 + (f(a))^2 - \int_a^b (f(x))^2 dx - \int_a^b x\, f(x) f'(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b x\, f(x) f'(x) dx = -1 - \int_a^b x\, f(x)\, f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b x\, f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$$

مثال: فرض کنید توابع f و g روی بازه $[a,b]$ دارای مشتقات دوم پیوسته باشند

همچنین $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$. ثابت کنید.

$$\int_a^b f''(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) g''(x) dx$$

حل:

$$\begin{cases} g(x) = u \\ f''(x)dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x)dx = du \\ f'(x) = v \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f''(x) g(x) dx$$

$$= \mathrm{g(x)f'}(x) \int_a^b - \int g'(x) f'(x) dx$$

$$\begin{cases} u = g'(x) \\ f'(x)dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = g''(x)dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f''(x) g(x) dx = -g'(x) f(x) \int_a^b + \int_a^b g''(x) f(x) dx$$

در این تمرین ما طرف دوم معادله مشتقات دوم g را می خواهیم. چون طرف دوم g'' داریم پس در طرف اول g را u می گیریم.

۲- انتگرالهای مثلثاتی:

۱,۲ - برای محاسبه انتگرالهایی شبیه $\int sin^n x\, dx$ و $\int cos^n x\, dx$ دو حالت را در نظر می گیریم:

حالت اول : اگر n عدد صحیح فرد مثبتی باشد ، آنگاه از اتحاد $sin^2 x + cos^2 x = 1$ استفاده کنید، یعنی بنویسید:

$$sin^n \mathrm{x} = sin^{n-2} x\, sin^2 x \Rightarrow sin^{n-2}(1 - cos^2 x) = sin^{n-2} x - sin^{n-2} x\, cos^2 x$$

برای $cos^n x$ هم همینطور .

مثال:
$$\int sin^3 x\, dx = \int \sin x . sin^2 x\, dx$$

$$=\int \sin x(1-cos^2 x)dx = \int \sin x\, dx - \int \sin x\, cos^2 x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3} cos^3 x + c$$

حالت دوم : اگر n عدد صحیح مثبت و زوج باشد آنگاه از اتحادهای $cos^2 x = \frac{1+cos\, 2\, x}{2}$ و $sin^2 x = \frac{1-cos\, 2x}{2}$ استفاده کنید.

مثال:

$$\int cos^4 x\, dx = \int (cos^2 x)^2 dx \quad \int (\frac{1+cos\, 2\, x}{2})^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1+ cos\, 2x + cos^2 2\, x)dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} sin\, 2\, x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1+cos\, 4\, x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} sin\, 2\, x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} sin\, 4\, x + c$$

۲٫۲ - برای محاسبه انتگرالهای شبیه $\int tan^n x\, dx$ و $\int cot^n x\, dx$ که در آن n عدد صحیح مثبتی است به صورت زیر عمل می کنیم.

$$tan^n x = tan^{n-2} x\, tan^2 x = tan^{n-2} x\, (sec^2 x - 1)$$

$$cot^n x = cot^{n-2} x\, cot^2 x = cot^{n-2} x (csc^2 x - 1)$$

مثال:

$$\int tan^3 x\, dx = \int tan\, x . tan^2 x\, dx = \int tan\, x(sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int tan\, x . sec^2 x\, dx - \int tan\, x\, dx = \frac{1}{2} tan^2 x - \ln|\sec| + c$$

۳٫۲ - در محاسبه انتگرالهایی نظیر $\int sec^n x\, dx$ و $\int csc^n x\, dx$ که n عدد صحیح مثبتی است دو حالت در نظر می گیریم.

حالت اول: اگر n زوج باشد آنگاه از اتحادهای $\begin{cases} sec^2 x = 1 + tan^2 x \\ csc^2 x = 1 + cot^2 x \end{cases}$ استفاده می کنیم.

یعنی می نویسیم:

$$sec^n x = sec^{n-2} x\, sec^2 x = (1 + tan^2 x)^{\frac{n-2}{2}} sec^2 x$$

$$csc^n x = csc^{n-2} x\, csc^2 x = (1 + cot^2 x)^{\frac{n-2}{2}} csc^2 x$$

مثال:

$$\int sec^4 x\, dx = \int sec^2 x\, sec^2 x\, dx$$

$$= \int (1+tan^2 x) sec^2 x\, dx = \int sec^2 x\, dx + \int tan^2 x . sec^2 x\, dx = tan\, x + \frac{1}{3} tan^3 x + c$$

حالت دوم: اگر n فرد باشد آنگاه از روش جزء به جزء استفاده می کنیم مثلاً

$$\int sec^n x\, dx = sec^{n-2} x . sec^2 x\, dx$$

و با انتخاب $\begin{cases} \mathrm{u} = \sec^{n-2} \mathrm{x} \\ \mathrm{dv} = \sec^2 \mathrm{x}\, \mathrm{dx} \end{cases}$ ، توان n کاهش می یابد.

مثال:

$$\int sec^3 x\, dx =$$

$$\int \sec x . sec^2 x\, dx \qquad \begin{cases} u = secx & \to & du = \sec x\, tg\, x\, dx \\ dv = sec^2 x dx & \to & v = tg\, x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int sec^3 x\, dx = \sec x\, tg - \int \sec x (sec^2 x - 1) dx = \sec x\, tg\, x - \int sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

$$\Rightarrow 2 \int sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\, x - \int \sec x\, dx = \sec x\, tg\, x - \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\Rightarrow sec^3 x\, dx = \frac{1}{2} \sec x . tg\, x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + tg\, x| + c$$

۴,۲ - برای محاسبه انتگرالهایی مانند $\int sin^m x\ cos^n x$ دو حالت در نظر بگیرید.

حالت اول : اگر حداقل یکی از اعداد m یا n صحیح مثبت فرد باشند آنگاه اتحاد $sin^2 x + cos^2 x = 1$ را استفاده کنید.

مثال:

$$\int \cos^{\frac{1}{2}} x\ \sin^5 x\, dx = \int \cos^{\frac{1}{2}} x\ \sin^4 x\ \sin x\, dx = \int \cos^{\frac{1}{2}} x\, (1 - \cos^2 x)^2\ \sin x\, dx$$

$$= \int \left(\cos^{\frac{1}{2}} x - 2\ \cos^{\frac{5}{2}} x + \cos^{\frac{9}{2}} x \right) \sin x\, dx = \int \cos^{\frac{1}{2}} x\ \sin x\, dx$$

$$-2 \int \cos^{\frac{5}{2}} x\ \sin x\, dx + \int \cos^{\frac{9}{2}} x\ \sin x\, dx = \frac{-2}{3} \cos^{\frac{3}{2}} x + \cdots + c$$

حالت دوم : اگر هر دو عدد m و n زوج مثبت باشد باز هم اتحاد $sin^2 x + cos^2 x = 1$ استفاده کنید. که در این صورت انتگرال به حالتهای قبل تبدیل می شود.

مثال:

$$\int \sin^2 x\ \cos^4 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x\, dx = \int \cos^4 x\, dx - \int \cos^6 x\, dx = \text{تبدیل به حالتهای قبل}$$

۵,۲ ـ : محاسبه انتگرالهایی نظیر $\int sec^n x\ tan^m x\, dx$ و $\int csc^n x\ cot^m x\, dx$

سه حالت در نظر بگیرید:

حالت اول : اگر m عددی صحیح مثبت و فرد باشد آنگاه بنویسید:

$$\int \sec^n x\ \tan^m x\, dx = \int \sec^{n-1} x\ \tan^{m-1} x. \sec x\ \tan x\, dx$$

و بعد از اتحاد $tan^2 x = sec^2 x - 1$ استفاده می کنیم. بطور مشابه:

$$\int \csc^n x\ \cot^m x\, dx = \int \csc^{n-1} x\ \cot^{m-1} x\ \csc x\ \cot x\, dx$$

و سپس از اتحاد $cot^2 x = csc^2 x - 1$ استفاده می کنیم.

مثال:

$$\int \tan^3 x\ \sec^3 x\, dx = \int \tan^2 x\ \sec^2 x\ \sec x\ \tan x$$

$$= \int (\sec^2 X - 1) \sec^2 x. \sec x\ \tan x\, dx$$

$$= \int sec^4 x\ sec\, x\, tan\, x\, dx - \int sec^2 x\ sec\, x\ tan\, x\, dx = \frac{1}{5} sec^5 x + \frac{1}{3} sec^3 x + c$$

حالت دوم : اگر n عددی صحیح زوج و مثبت باشد آنگاه بنویسید.

$$\int tan^m x\ sec^n x\, dx = \int tan^m x\ sec^{n-2} x\ sec^2 x\, dx$$

و بعد از اتحاد $csc^2 x = 1 + cot^2 x$ استفاده کنید. و بطور مشابه:

$$\int cot^m x\ csc^n x\, dx = \int cot^m x\ csc^{n-2} x\ csc^2 x\, dx$$

و سپس از اتحاد $csc^2 x = 1 + cot^2 x$ استفاده کنید.

مثال:

$$\int \tan^2 x\ \sec^4 x\, dx =$$
$$\int \tan^2 x\ \sec^2 x\ \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^2 x\, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx = \int \tan^2 x\ \sec^2 x\, dx + \int \tan^4 x\ \sec^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c$$

حالت سوم : اگر m عددی زوج و n عددی فرد باشد در اینصورت با استفاده از اتحادهای $sec^2 x = 1 + tan^2 x$ و $csc^2 x = 1 + cot^2 x$ به حالتهای قبل استفاده می کنیم.

یعنی بنویسید:

$$\int tan^m x\ sec^n x\, dx = \int (tan^2 x)^{\frac{m}{2}} sec^n x\, dx = (sec^2 x - 1)^{\frac{m}{2}}\ sec^n x\, dx$$

مثال:

$$\int tan^2 x\ sec\, x\, dx = \int (sec^2 x - 1)\, sec\, x\, dx$$

$$= \int sec^3 x\, dx - \int \underbrace{sec\, x\, dx}$$

$$= \int sec^3 x\, dx - ln|sec\, x + tan\, x| + c$$

۶,۲ - برای محاسبه انتگرالهایی نظیر:

$$\int \sin mx \ \cos nx\, dx$$

$$\int \sin mx \ \sin nx\, dx$$

$$\int \cos mx \ \cos nx\, dx$$

از اتحادهای زیر استفاده کنید.

$$2 \sin A \ \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

$$2 \ \sin A \ \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$2 \ \cos A \ \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

مثال:

$$\int \sin 3x \ \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \cos x - \ \cos 5x\, dx = \frac{1}{2} \left(\sin x + \frac{1}{5} \sin 5\, x\right) + c$$

۳- در محاسبه انتگرالهایی که عباراتی چون $\sqrt{x^2 - a^2}$ و $\sqrt{a^2 + x^2}$ و $\sqrt{a^2 - x^2}$ در آنها مشاهده شده ، می توان از تغییر متغیرهای زیر استفاده کرد.

برای $x^2 - a^2$ از تغییر متغیر $x = a \ \sec\theta$

برای $a^2 + x^2$ از تغییر متغیر $x = a \tan\theta$

برای $a^2 - x^2$ از تغییر متغیر $x = a \ \sin\theta$

مثال: $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$

حل:

بگیرید: $x=2 \sin\theta$

$$4\text{-}x^2 = 4 - 4 \ sin^2\, \theta = 4 \ cos^2\, \theta$$

$$\Rightarrow dx = 2 \ cos\, \theta\, d\theta \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2 \ cos\, \theta\, d\theta}{4 \ sin^2\, \theta \sqrt{4 \ cos^2\, \theta}}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{cos\, \theta\, d\theta}{sin^2\, \theta\, |cos\, \theta|} = \pm \frac{1}{4} \int \frac{1}{sin^2\, \theta}\, d\theta = \pm \frac{1}{4} \int csc^2\, \theta\, d\theta = \pm \frac{1}{4} (-cot\, \theta + c)$$

تذکر ۱ : چنانچه انتگرال معین باشد باید روی علامت $\cos x$ بحث کنید.

به عنوان مثال اگر $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه همواره $\cos\theta > 0$ و لذا به علامت $\pm$ نیازی نیست.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin^2\theta\, |\cos\theta|} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta}$$

مثال:

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\quad, a > 0 \qquad\qquad x = a\,\sin\theta$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\, d\theta = \pm\int d\theta = \pm\theta + c$$

در صورتی که: $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ آنگاه: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

مثال: $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

$$X = a\tan\theta \Rightarrow \begin{cases} dx = a\,\sec^2\theta\, d\theta \\ x^2 + a^2 = a^2\sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$= \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\,\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

مثال:

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \left|\frac{x}{a}\right| > 1$

حل: بگیرید

$$x = \sec\theta$$

در اینصورت : $x^2 - a^2 = a^2\tan^2\theta$

$$dx = \sec\theta\,\tan\theta\, d\theta \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\,\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2-\tan^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\sec\theta\,\tan\theta}{|\tan\theta|}\quad d\theta = \pm\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \pm\ln|\sec\theta + \tan\theta| = \pm ln\left|\frac{x}{a} \mp \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c$$

اما برای علامتها می توان نوشت:

وقتی $\sec, \tan, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ هر دو مثبت و وقتی $\sec, \tan, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ هر دو منفی خواهند بود لذا:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c \\ -\ln\left|\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c \end{cases}$$

اما داریم:

$$-ln\left|\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| = \ln\left|\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}\right| -$$

$$= ln\left|\frac{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}{a^2}\right| = ln\left|\frac{x}{a}+ \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|$$

بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a}+ \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c = \ln\left|x+\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}\right| + c'$$

تذکر ۲ : در عبارت $\sqrt{a^2+x^2}$،$a> 0$ می توان از تغییر متغیر $x= a \sin h\ \theta$ استفاده کرد.

مثال:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$X = a\ sin\,h\,\theta \Rightarrow x^2+a^2 = a^2\cos h^2\theta$$

$$dx = a\cos h\ \theta\ d\theta$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2\ \cos h^2\theta}}\ d\theta = \int d\theta = \theta + c = \sin h^{-1}\ \frac{x}{a} + c$$

در اینگونه تغییر متغیر، نیازی به بحث علامت رادیکال نیست زیرا می دانیم $\cos h\ x \geq 1$ همینطور در صورتی که جمله $\sqrt{x^2-a^2}$ ظاهر شود می توانید از تغییر متغیر $x= a \cos h\ x$ استفاده کنید.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{a\ \sin h\theta\ d\theta}{\sqrt{a^2\sin h^2\theta}} = \pm\theta + c = \pm\cos h^{-1}\ \frac{x}{a}$$

تذکر ۳ : توجه داشته باشید چنانچه از تغییر متغیرهای گفته شده استفاده می کنید حتماً روی علامتها بخصوص وقتی انتگرال معین می باشد استفاده کنید.

۴- محاسبه انتگرالهایی که در آنها جمله درجه دوم

ax^2+bx+c که $a\neq 0$ و $b,c\in R$ ظاهر شود.

معمولاً سعی می کنیم که معادلات درجه دوم را به اتحاد مربع تبدیل کنیم و سپس از روش های قبل استفاده نماییم.

مثال: با گرفتن $x+\frac{1}{2} = u$

$$\int\frac{(x-1)dx}{x^2+x+1} = \int\frac{(x-1)dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \int\frac{(x-1)dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int\frac{(u-\frac{3}{2})du}{u^2+\frac{3}{4}} = \int\frac{udu}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}u + c$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}) + \sqrt{3}\ \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right) + c$$

مثال: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1)+c$

۵ – انتگرال گیری به روش تفکیک کسرهای ساده:

قبل از اینکه این بحث را شروع کنیم ، باید بگوییم که در $F(x) = \int f(x)dx$ معمولاً $F(x)$ را تابع اولیه f و خود $f(x)$ را انتگرالده یا انتگران گوییم. اکنون در محاسبه $\int f(x)dx$ ، فرض کنید انتگرالده بصورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ باشد که P و Q دو چند جمله ای بوده و درجه P حداقل یکی از درجه Q کمتر است . اگر

$$Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_nx+b_n)$$

آنگاه: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$

که با مخرج مشترک گرفتن و متحد قرار دادن صورتها می توان مقادیر A_1، A_2......A_n را پیدا کرد.

در نتیجه: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{a_1x+b_1}\,dx + \cdots + \int \frac{A_n}{a_nx+b_n}\,dx$

مثال:

$$\int \frac{dx}{x^2-x} = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x-A}{x(x-1)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=-1 \\ B=1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + ln|x-1| + c = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c$$

اکنون اگر در تجزیه $Q(x)$ عوامل مشترک پیدا شود یعنی:

$$Q(x) = a_1x+b_1)^{r_1}(a_2x+b_2)^{r_2} \ldots \ldots (a_nx+b_n)^{r_n}$$

در اینصورت: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots \frac{A_{r_1}}{(a_1x+b_1)^{r_1}}$

$$+\frac{B_1}{b_2x+b_2} + \frac{B_2}{(a_2x+b_2)^2} + \cdots + \frac{B_{r_2}}{(a_2x+b_2)^{p_2}}$$

$$+\cdots+\frac{C_1}{(a_nx+b_n)} + \frac{C_2}{(a_nx+b_n)^2} + \cdots + \frac{C_{r_n}}{(a_nx+b_n)^{r_n}}$$

که با مخرج مشترک گرفتن و متحد قرار دادن صورتها می توان تمام مجهولات A_i ها و B_i ها و C_i ها را پیدا کرد.

مثلاً کسر $\frac{1}{x^2(x-1)^3}$ را بصورت زیر تجزیه می کنیم.

$$\frac{1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(X-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}$$

مثال: $\int \frac{(x-1)dx}{x^2(x+1)}$

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A_1x(x+1)+A_2(x+1)+BX^2}{x^2(x+1)}$$

$$=\frac{(A_1+B)x^2+(A_1+A_2)x+A_2}{x^2(x+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_1+B=0\\ A_1+A_2=1\\ A_2=-1\end{cases}\qquad\Rightarrow\begin{cases}A_1=2\\ A_2=-1\\ B=-2\end{cases}$$

بنابراین:

$$\int\frac{dx}{x^2(x+1)}=\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{-1}{x^2}dx+\int\frac{-2}{x+1}$$

$$=2\ln|x|+\frac{1}{2}-2\ln|x+1|+c=\frac{1}{2}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$$

تذکر مهم: اگر در تجزیه $Q(x)$ عوامل مجزای ضرب دارای درجه بیشتر از یک باشند آنگاه عوامل صورت یک درجه کمتر خواهند بود.

مثلاً:

$$\frac{1}{(x^2+1)^3}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3}$$

به عنوان مثال:

$$\int\frac{5x^2+3x-2}{x^3-1}dx$$

$$\frac{5x^2+3x-2}{x^3-1}=\frac{5x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+c}{x^2+x+1}$$

$$=\qquad\begin{cases}A+B=5\\ A-B+C=3\\ A-C=-2\end{cases}\qquad\Rightarrow\begin{cases}A=2\\ B=3\\ C=4\end{cases}$$

$$\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-c}{x^3-1}$$

اگر در انتگرالده $\frac{P(X)}{Q(X)}$ درجه $P(X)$ بیشتر یا مساوی $Q(X)$ باشد آنگاه ابتدا $P(X)$ را بر $Q(X)$ تقسیم می کنیم و عملیات قبل را برای باقیمانده انجام می دهیم.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(X)+\frac{t(x)}{Q(X)}$$

یعنی با عمل تقسیم داریم:

و لذا

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int R(x)dx + \int \frac{t(x)}{Q(x)} dx$$

۶- در انتگرالهایی که شامل توابع گویایی از sin x و cos x می باشند ، از تغییر متغیر $z = \tan\frac{x}{2}$ استفاده کنید

در اینصورت

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$dz = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

مثال: مطلوبست تعیین انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

حل: با تغییر متغیر گفته شده بدست می آوریم

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2dz}{1+2z}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{1+z} = ln|1+z| + c = ln\left|1+tan\frac{x}{2}\right| + c$$

در صورتی که انتگرالده تابعی گویا از sin x و cos x باشد و با تبدیل sin x به -sin x و یا cos x به -cos x ، انتگرال هیچ تغییری نکند آنگاه از تغییر متغیر z=tan x استفاده کنید زیرا:

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{z^2}{1+z^2} \qquad dz = (1+\tan^2 x)dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+z^2} \qquad dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

مثال: انتگرال زیر را بدست آورید.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

حل:با تغییر متغیر فوق داریم.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{1+2z^2} = {}^1\!/_2 \int \frac{dz}{z^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1}{2} x\sqrt{2}\ \tan^{-1}\sqrt{2}\,z + c$$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\tan x\right) + c$

۷- اگر انتگرالده شامل توان های کسری از متغییر x باشد آنگاه می توان با تغییر متغیر $x = z^n$ ساده کرد که در آن n کوچکترین مضرب مشترک مخرج توانهاست.

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}$$

چون کوچکترین مضرب مشترک بین ۲ و ۴، عدد ۴ می باشد لذا بگیرید. $x = z^4$

در نتیجه:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4z^3dz}{z^2-z} = 4\int (z+1) + \frac{1}{z-1}dz$$

$$= 4\int (z+1)dz + 4\int \frac{dz}{z-1} = 2z^2 + 4z + 4\ln|z-1| + c = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right| + c$$